

30652

现代应用数学丛书

集合 拓扑 测度

〔日〕河田敬义 著



上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

集 合 · 拓 扑 · 測 度

〔日〕河田敬义 著

賴 英 华 譯

夏 道 行 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店现代应用数学丛书之一的中译本,以较少篇幅,扼要介绍集合論、拓扑空間、距离空間、測度論、勒貝格积分等現代数学中的基础理論,并附有习題,供高等院校师生、研究工作以及工程师等参考。

現代应用数学丛书

集 合 · 拓 扑 · 測 度

原 书 名	集 合 · 位 相 · 測 度
原 著 者	(日) 河 田 敏 义
原出版者	岩 波 书 店
譯 者	賴 英 华
校 者	夏 道 行

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海市印刷四厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 3 20/32 字數 83,000

1961 年 8 月第 1 版 1961 年 8 月第 1 次印刷

印数 1-16,000

統一书号: 13119·408

定 价: (十四) 0.64 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册,分成A、B两组,各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并,整理成42种,不另分組編号,陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广,其内容都和現代科学技术密切有关,有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富,而叙述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要内容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻譯出版这一套书,对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陸續出版的,写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理,为了尽可能地减少这种影响,我們在每一譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最近发展状况,并对全书内容作一些評价,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志,为提高书籍的质量付出了巨大劳动,在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

本书以較少篇幅講述了集合、拓扑、測度三大內容，主要是針對这套丛书（岩波講座，現代应用数学）的其他数学分支，例如泛函分析、微分方程、概率論等作为基础与工具而編写的。

作者在集合这一章里，基本上把集合理論中的重要概念和主要性质都作了叙述，特别是对“映象”分析較透。最后还引进了重要的 Zorn 公理。

第 2, 3 两章分別介紹拓扑空間和距离空間，除列举了有关的許多重要概念之外，还叙述了苏联数学家 П. С. Урысон 的引理和距离化定理（1951 年苏联数学家 Ю. Смирнов 发表了比这更好的結果，參看关肇直編著拓扑空間概論），Тихонов 的直积定理等。这些定理在理論研究和实际应用上都有很重要的价值。

占本书大半篇幅的是第 4, 5 章的測度和积分。作者在第 4 章中講述了測度的基本概念和擴張定理等內容，而在第 5 章中，在和 Riemann 积分的对比下，叙述了 Lebesgue 积分及其三种定义方法，并指出利用第二种方法，即簡單函数的方法較为方便。此外，还介紹了应用非常广泛的 Lebesgue 控制收斂定理，Fubini 定理等。

本书的內容安排比較緊湊，尽量照顾到由特殊到一般来叙述，笔法簡洁而精练，几乎一切命題的証明只着重于讲述方法而不詳細推导。这可說是本书的特点，初学的讀者可能会感到困难，但可当作习题来做。全书在叙述中联系其他数学分支較少，也可能会使讀者感到不便。

本书是学习其他数学分支的基础，对于打算在較短時間內掌

握这些基础知識的讀者來說，本书是一本值得推荐的适宜的讀物。

本书譯竟，承楊从仁先生、夏道行先生审閱，提出了很多宝貴的意見，并增补了一些必要的注釋，特此致謝。

譯 者

目 录

出版說明

譯者序

第1章 集合	1
§1 集合及其运算	1
§2 映象 (mapping)	5
§3 基数 (势)	10
§4 关系	11
§5 Zorn 公理	16
第2章 拓扑空間	17
§6 Euclid 空間	17
§7 拓扑空間	20
§8 連續映象	24
§9 拓扑空間的构成	27
§10 連通性	29
§11 分离条件 (Hausdorff 空間与正規空間)	30
§12 紧性	34
§13 局部紧性	37
第3章 距离空間	38
§14 收敛	38
§15 距离空間的一致拓扑性质	41
§16 距离空間的构成	44
§17 Banach 空間, Hilbert 空間	50
第4章 测度	53
§18 緒論	53
§19 Borel 集合体, Lebesgue 式测度	56
§20 测度空間的构成 I (Carathéodory 的外测度, Jordan 测度的 扩充)	62
§21 Euclid 空間上的测度	67

§ 22 测度空間的构成 II (直积测度).....	71
第 5 章 Lebesgue 积分.....	75
§ 23 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的比較.....	75
§ 24 可测函数.....	80
§ 25 Lebesgue 式积分.....	83
§ 26 函数空間.....	91
§ 27 連續函数的积分与测度.....	95
§ 28 集合函数及 Radon-Nikodym 定理.....	97
校后記.....	104

第 1 章 集 合

§ 1 集合及其运算

集合的概念已成为现代数学最基本的概念。已经有集合论知识的读者也许会想起基数(势)或序数的理论,但是作为数学这一门的最基本的集合论并不是指这些概念。

不论是读者已学过的代数学和几何学,抑或是即将要学的拓扑和测度理论,它们的完整体系都是先取集合 S , 从而设定其元素及子集的性质和运算的公理来构成的。自然科学与数学的关系好比文学与语法的关系。文学的主体为思想而表现于文章,语法则说明文章的构造。自然科学的研究对象为实体,而可用数学将它表达出来。数学的对象是几乎完全抽象的东西,而我们主要的兴趣仅在于它们相互的结合。这个抽象东西就是集合。读者也许在开始的时候有这样的印象:就是把极容易的东西,故意唠唠叨叨说得难懂。但希望把它看做学外国语文必须先学语法一样,刚开始学习时要有耐心。以下,用易懂的方法从集合论的叙述讲起。

逻辑记号 $\neg A$ 表示否定, $A \& B$ 表示逻辑积(A 及 B), $A \text{ or } B$ 表示逻辑和(A 或者 B)。 $A \Rightarrow B$ 表示含蕴(implication), 即“有 A 就有 B ”, $A \Leftrightarrow B$ 是等价(equivalence)记号,表示“ $A \Rightarrow B \& B \Rightarrow A$ ”。此外

$$(\exists x)P$$

表示“存在着具有性质 P 的 x ”,

$$(\forall x)P$$

则表示“对于所有 x 都有性质 P ”。

所謂事物 a (不是字母 a) 就是指用 a 来表示的对象。 $a=b$ 意味着: 关于 a 成立的性質, 对于 b 也成立, 而关于 b 成立的性質, 对于 a 亦成立。所謂集合 A 乃是可以互相区别的事物的汇集。构成集合 A 的事物 a 称为 A 的元 (或称元素 element)。当事物 a 属于 A (或者说包含于 A) 时, 記作

$$a \in A,$$

否則就用 $a \notin A$ 表示。

在集合論中, 所有其他的概念都可以由事物 (元素)、集合和关系 \in 引导出来。

1.1* 設有兩集合 A, B , 如果 A 中的元与 B 中的元完全一致, 也就是說: $a \in A \Leftrightarrow a \in B$ 的时候, 表之为 $A=B$ 。

1.2* 一个元素也沒有的集合 (这也认为是集合的一种) 称为空集 (empty set)。空集用 \emptyset 表示。

当集合 A 含有元素 a, b, \dots, c 时, 写为

$$A = \{a, b, \dots, c\}.$$

例如: $\{x\}$ 表示仅含一个元素 x 的集合, 而 $\{x, y\}$ 乃是由两个元素 x, y 所构成。

$\{x, y\}$ 与 $\{y, x\}$ 是同一集合的不同写法, 故 $\{x, y\} = \{y, x\}$ 。同样, $\{x, x\} = \{x\}$ 。

1.3* 当 $x \in A$ 时, 称 x 为变元, 而称 A 为 x 的变域。設 $P(x)$ 是关于 x 的命题, 那么

$$B = \{x; x \in A, P(x)\}$$

乃表示: 对于使命題 $P(x)$ 成立的所有属于 A 的 x 的全体。

1.4* 若 A 的所有元素都是 B 中元素, 即: $a \in A \Rightarrow a \in B$, 此时称 A 为 B 的子集, 記为

注: 凡带有 * 記号者表示这一小段为定义 (下同)。

$$A \subset B.$$

由此可知: (i) $\emptyset \subset A$, (ii) $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A$, (iii) $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \& (B \subset A)$, (iv) $(A \subset B) \& (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

1.5* 所谓 C 是 A, B 两集合之和集(或称并集)是指由 A 及 B 中的元素全体所构成的集合, 即: $x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ or } x \in B$, 用记号

$$C = A \cup B$$

表示。

所谓 C 是 A, B 两集合之交集, 意指 C 是由 A, B 共有元素所构成的集合, 即: $x \in C \Leftrightarrow x \in A \& x \in B$. 用 $C = A \cap B$ 表示。

设 A, B 为两集合, 并设集合 C 的所有元素都属于 A 但不属于 B , 即: $x \in C \Leftrightarrow x \in A \& x \notin B$, 这时称 C 为 A 与 B 的差集, 记为

$$C = A - B.$$

1.6 对于集合 A, B, C, \dots , 有如下的性质:

交换律 $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$;

结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

吸收律 $(A \cup B) \cap A = A, (A \cap B) \cup A = A.$

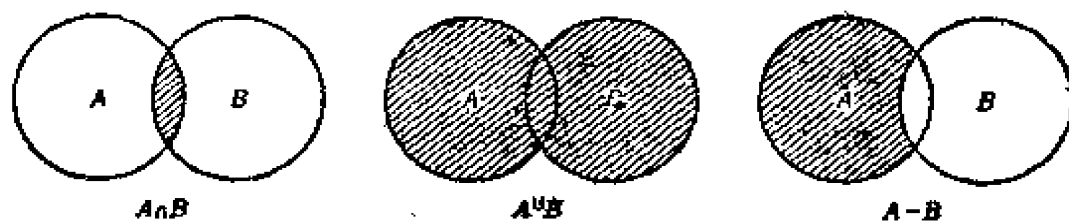


图 1.1

1.7* 集合的元素可以为任何事物, 因此, 以集合为元素而构成的集合(集合的集合)等也在考虑之列。在这样的意义下, 我们

用 $\mathfrak{P}(X)$ 表示以集合 X 的所有子集为元素而成的集合, 并称 $\mathfrak{P}(X)$ 为 X 的幂集合, 记为

$$\mathfrak{P}(X) = \{A; A \subset X\}.$$

特别是 \emptyset 与 X 都属于 $\mathfrak{P}(X)$ 。一般来讲, $\mathfrak{P}(X)$ 的子集 \mathfrak{A} 称为集合族。此外, 对于 $A \in \mathfrak{P}(X)$, 称

$$A^c = X - A$$

为 A 的(关于 X 的)补集(complement)。

若 $A, B \in \mathfrak{P}(X)$, 则 $A \cup B$ 及 $A \cap B$ 也属于 $\mathfrak{P}(X)$ 。除此以外, 尚有下列等式成立:

1.8 de Morgan 公式

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c, A^{cc} = A, \\ A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset.$$

[问题] 证明 1.6, 1.8, 并用图表示之。

1.9* 用 (a, b) 表示元素 a, b 的序偶。 $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \ \& \ b = b'$ 。

例如 $(a, b) = (\{a\}, \{a, b\})$, 即有上述的性质。

设 A, B 为两集合, 称

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$$

为 A, B 的直积集合。它的射影 pr (projection) 定义为

$$pr_A: A \times B \rightarrow A, pr_A(a, b) = a,$$

$$pr_B: A \times B \rightarrow B, pr_B(a, b) = b.$$

如果 $A_1 \subset A, B_1 \subset B$, 就定义为

$$pr_A^{-1}(A_1) = A_1 \times B, pr_B^{-1}(B_1) = A \times B_1,$$

$$pr_A^{-1}(A_1) \cap pr_B^{-1}(B_1) = A_1 \times B_1.$$

设 $A_1, A_2 \subset A$ 而 $B_1, B_2 \subset B$, 可证下面等式成立(试各以图解表明):

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

$$(A_1 \times B_1)^c = (A_1^c \times B) \cup (A_1 \times B_1^c) = (A \times B_1^c) \cup (A_1^c \times B).$$

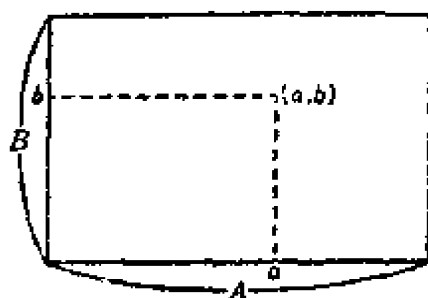


图 1.2

同样,用 $(a, b, c, \dots, f) = ((\dots((a, b), c), \dots), f)$ 来定义元素 a, b, c, \dots, f 的有序集。 $(a, b, c, \dots, f) = (a', b', c', \dots, f') \Leftrightarrow a = a', b = b', \dots, f = f'$. 用

$$A \times B \times \dots \times C = \{(a, b, \dots, c); a \in A, b \in B, \dots, c \in C\}$$

来定义集合 A, B, \dots, C 的直积集合。

§2 映象(mapping)

2.1* 设有集合 A, B . 如果有一对应关系或法则存在, 对于 A 的任一元 a , 有 B 中唯一的一元 b 与之对应, 我们就称给出了一个从 A 到 B 的映象 f , 用

$$f: A \rightarrow B \text{ (或 } A \xrightarrow{f} B)$$

表示, 并写成 $b = f(a)$. 此时称 A 为映象 f 的定义域 (domain), 而

$$f(A) = \{f(a); a \in A\} \quad (\subset B)$$

称为 f 的值域 (range). 对应, 函数, 与映象同义。

2.2* 设有两映象 f, g , $f = g$ 表示 f 的定义域 A 与 g 的定义域 A 完全一致, 且对所有的 $a \in A$ 皆有 $f(a) = g(a)$. 如果映象 $f: A \rightarrow B$, 对于任意 $a \in A$, 都有 $f(a) = b_0$, 这里 b_0 为一个固定的元, 则称 f 为以 b_0 为值的常值映象。若 $A = B$, 而且对于所有的 $a \in A$, $f(a) = a$, 则称 f 为 A 的恒等映象, 用 1_A 来表示。

2.3* 設 $f: A \rightarrow B$, 如果 $f(A) = B$, 則稱 f 為 A 到 B 上的映象 (或稱完全映象)。如果 $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$, 則稱 f 為 1-1 对应的映象 (或稱單調映象)。若映象 $f: A \rightarrow B$ 是由 A 到 B 上的 1-1 对应的映象, 則稱 f 為完全 1-1 对应的映象 (或稱完全單調映象)。設 $f: A \rightarrow B$ 為完全 1-1 对应的映象, 對於 $f(a) = b$, 置 $a = f^{-1}(b)$ ($a \in A, b \in B$), 由是得出一個完全映象 $f^{-1}: B \rightarrow A$, 稱 f^{-1} 為 f 的逆映象。

2.4* 設映象 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 用 $h(a) = g(f(a))$ ($a \in A$) 來定義映象 $h: A \rightarrow C$, 這時稱 h 為 f, g 的結合, 記作

$$h = g \circ f.$$

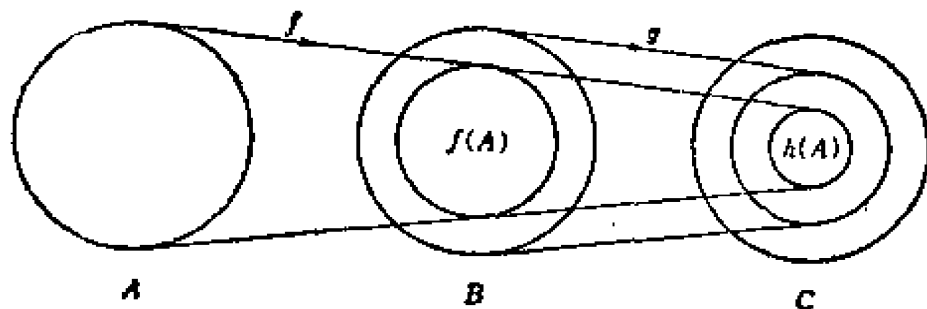


圖 2.1

2.5 由上面定義可得:

(i) 結合律: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$

(ii) 設 $f: A \rightarrow B$ 為完全 1-1 的映象, 則 $f^{-1} \circ f = 1_A, f \circ f^{-1} = 1_B.$

[問題] 由完全 1-1 的映象 $f: A \rightarrow A$ 全體構成的集合, 按照上面的結合成群。這時, 群的單位元為 1_A , f 的逆元為 f^{-1} 。

2.6* 設 $A_1 \subset A$, 並有映象 $f: A \rightarrow B, g: A_1 \rightarrow B$, 如果對於所有的 $a_1 \in A_1$, 有 $f(a_1) = g(a_1)$, 則稱 f 為 g 的擴大, 相對地來講, 稱 g 為 f 的縮小, 記為

$$g = f|A_1.$$

設有映象 $f: A \rightarrow B$. 作直積集合 $A \times B$ 的子集合

$$G(f) = \{(a, f(a)); a \in A\}$$

称 $G(f)$ 为 f 的图象。 $E = G(f)$ 具有下面的性质:

- (i) 对于所有的 $a \in A$, 存在着 $(a, b) \in E$ 的元素 (a, b) ;
- (ii) 若 $(a, b) \in E$, $(a, b') \in E$, 则 $b = b'$.

反之, 如果 $E \subset A \times B$ 满足 (i), (ii), 当 $(a, b) \in E$ 时, 置 $b = f(a)$, 这样就定义了一个映象 $f: A \rightarrow B$. 由此可见, 映象的概念在集合论中, 并不是新的概念, 可从具有性质 (i), (ii) 的 $A \times B$ 子集 E 引出来。

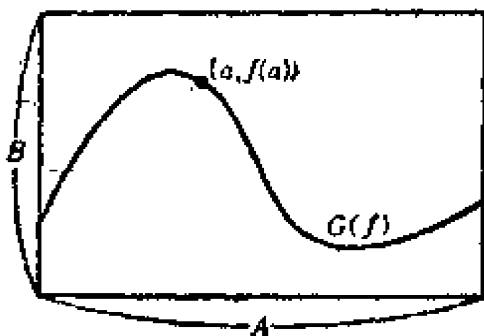


图 2.2

[问题] 试将 2.2~2.6 都用图象来表示。

2.7* (多变元的映象) 用 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$ ($x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n$)

表示映象 $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$. 这时称 f 为 n 变元的映象。

2.8* 设已知一映象 $f: X \rightarrow Y$, 当 $A \in \mathfrak{P}(X)$ 时, 置

$$f(A) = \{f(a); a \in A\} \quad (\in \mathfrak{P}(Y)),$$

当 $B \in \mathfrak{P}(Y)$ 时, 置

$$f^{-1}(B) = \{b; f(b) \in B\} \quad (\in \mathfrak{P}(X))$$

(在这个定义中, f 是完全映象抑或完全 1-1 对应的映象, 那是无关紧要的)。于是, 由 $f: X \rightarrow Y$ 就引出了映象

$$f: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y) \quad \text{及} \quad f^{-1}: \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X).$$

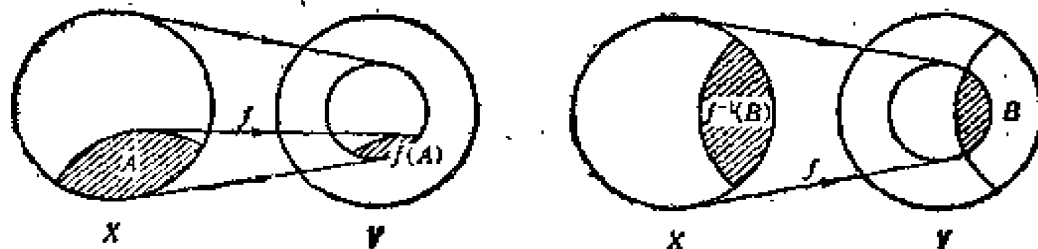


图 2.3

2.9 设 $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(X)$, 则

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2); \quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

設 $B_1, B_2 \in \mathfrak{P}(Y)$, 則

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1^c) = f^{-1}(B_1)^c \textcircled{1}.$$

[問題] 1. 求證 2.9.

2. 試作 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ 的例子。

3. 求證 $A \subset f^{-1} \circ f(A)$, $f \circ f^{-1}(B) = B \cap f(X)$.

2.10* 設有映象 $f: A \rightarrow \mathfrak{P}(X)$, 置

$$f(A) = \{A_\lambda; \lambda \in A\} (\subset \mathfrak{P}(X) \quad (A_\lambda = f(\lambda))),$$

稱 $f(A)$ 為以 A 為參變數的集合族, 記

$$\bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda = \{x; (\exists \lambda \in A) (x \in A_\lambda)\} \quad (\in \mathfrak{P}(X)),$$

$$\bigcap_{\lambda \in A} A_\lambda = \{x; (\forall \lambda \in A) (x \in A_\lambda)\} \quad (\in \mathfrak{P}(X)).$$

若 $A = \{1, 2, \dots, n\}$, 則 $f(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 以及

$$\bigcup_A A_\lambda = \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

$$\bigcap_A A_\lambda = \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

若 $A = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, 就有 $f(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$, 且

$$\bigcup_A A_\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_A A_\lambda = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

[問題] 証明下列各公式

$$1. (\bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in A} A_\lambda^c, \quad (\bigcap_{\lambda \in A} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda^c.$$

2. 設 $f: X \rightarrow Y$, $A_\lambda \in \mathfrak{P}(X)$, 則

$$f(\bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in A} f(A_\lambda), \quad f(\bigcap_{\lambda \in A} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in A} f(A_\lambda).$$

3. 設 $f: X \rightarrow Y$, $B_\lambda \in \mathfrak{P}(Y)$, 則

$$f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in A} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in A} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in A} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in A} f^{-1}(B_\lambda).$$

① 此處原書有誤, 應為 $f^{-1}(B_1^c) = f^{-1}(B_1)^c$. ——校者注

2.11* 设有两集合 A, B , 用记号

$$B^A$$

表示从 A 到 B 的所有映象 f 的全体。(如果映象 f 与它的图象 $G(f) \subset A \times B$ 等量齐观的话, 那么 $B^A \subset \mathfrak{P}(A \times B)$.)

2.12* 设有集合族 $\{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ ($A_\lambda \in \mathfrak{P}(X)$), 用

$$P = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad (\subset X^A)$$

表示具有 $\lambda \in \Lambda$ 及 $f(\lambda) \in A_\lambda$ 那样性质的映象 f 的全体, 即: $\{f; f \in X^A, f(\lambda) \in A_\lambda (\lambda \in \Lambda)\}$, 并称 $P = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 为 $\{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ 的

无限直积集合^①. P 的元素写成

$$\{a_\lambda; a_\lambda \in A_\lambda (\lambda \in \Lambda)\} \quad (a_\lambda = f(\lambda)),$$

或 $(\dots, a_\lambda, \dots)$.

特别是, 当 $\Lambda = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 时, 则置 $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = A_1 \times \dots \times A_n$, 它的元素用 (a_1, \dots, a_n) 表示。

其次, 当 $\Lambda = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 时, 则有 $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, 它的元素一般写为 $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ($a_n \in A_n, n=1, 2, \dots$)

对于无限直积集合^① P 的任一元素 $f = \{a_\lambda; a_\lambda \in A_\lambda\}$, 以 a_λ 与之对应 ($f \rightarrow a_\lambda$), 这样就得到了一个由 P 到 A_λ 的映象, 称它为射影, 用 pr_λ 表示, 即 $pr_\lambda: P \rightarrow A_\lambda$.

2.13 设 $A \in \mathfrak{P}(X)$, 我们定义有如下性质的映象 $c_A: X \rightarrow \{0, 1\}$:

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A), \end{cases}$$

称 c_A 为 A 的特征函数。

① 原书称 P 为无限直积集合是不妥当的, 应改为“直积集合”, 因为 Λ 不必是无限的。下同。——校者注

[問題] 对于任一 $B \in \mathfrak{P}(X)$ 就有一个特征函数 $c_B(x)$ 与之对应, 試建立 $\mathfrak{P}(X)$ 与 $\{0, 1\}^X$ 的 1-1 对应关系。

§3 基 数 (势)

3.1* 所謂两个集合 A, B 等价 (equivalent) 是指从 A 到 B 存在着一个完全 1-1 的映象。 A, B 等价时写成: $A \sim B$ 。

3.2 由等价定义, 可証:

$$A \sim A; A \sim B \Rightarrow B \sim A; A \sim B \& B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$

3.3* 对于集合 A , 我們附以所謂基数 (cardinal number 或称势) 与它对应。 A 的基数用 \bar{A} 或用德文字母 \aleph 来表示。当 $A \sim B$ 时, 集合 A, B 称为有同一基数, 用 $\bar{A} = \bar{B}$ 表示。

3.4* 用 $I = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 表示自然数全体的集合。凡与 I 等价的集合, 称为可数 (countable) 集合。集合 A 为可数的充要条件是: A 可表示成 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 。如果集合 A 有限或可数, 就称它为充其量可数。

3.5 設集合 A, B 为可数, 那么 $A \cup B, A \times B$ 也可数。又映象 $f: A \rightarrow X$ 的象集合 $f(A)$ 为充其量可数, 可是 $\mathfrak{P}(A)$ 并非可数。

証明 (i) 設 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $B - A = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ (因 A, B 为可数, 故 $B - A$ 为充其量可数, 所以可写成如是的形式), 而 $C = A \cup B = A \cup (B - A) = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ 。于此, 若置 $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)^①, 則 C 为可数集合, 即 $A \cup B$ 为可数。

(ii) 設 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, 我們只要置 $c_n = (a_i, b_{k-i})$ ($i < k$, $n = 1 + 2 + \dots + k - 1 + i$), 那末 $A \times B$ 可写成

^① 此处 $B - A$ 可能为有限集, 因此, 这里应改为: “于此, 当 $B - A$ 为无限集时, 若置 $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 当 $B - A$ 有 m 个元素时, 置 $c_1 = b_1, \dots, c_m = b_m$, $c_{m+n} = a_n$ 。”——校者注

$C = A \times B = \{c_1, c_2, \dots\}$, 由是可知 $A \times B$ 为可数。

(iii) 按照映象的定义易知 $f(A)$ 为充其量可数。

(iv) 最后证 $\mathfrak{P}(A)$ 不是可数集合。若 $\mathfrak{P}(A)$ 为可数集合, 则存在着一个完全 1-1 映象 $f: A \rightarrow \mathfrak{P}(A)$, 而 A 与 $\mathfrak{P}(A)$ 为等价。现设 $B = \{x; x \in A, x \in f(x)\}$ 。因 $B \in \mathfrak{P}(A)$, 故存在一个 b 使得 $f(b) = B$ 。如果 $b \in B$, 则由 B 的定义知 $b \in f(b) = B$, 所以 $b \in B$ 为不可能。如果 $b \notin B$, 则 $b \in f(b) = B$, 故 $b \in B$ 也是不可能, 得出了矛盾, 由此可见 $\mathfrak{P}(A)$ 不是可数集合。 证毕

3.6 整数全体的集合 Z , 有理数集合 Q 都是可数集合。实数集合则不可数。

证明 整数集合可以看作是正整数集合、负整数集合与 $\{0\}$ 的和集, 因此它为可数。

有理数 (除 0 外) 可表成 b/a ($a \in I, b \in Z$), 而 b/a 对应着 (a, b) ($a \in I, b \in Z$)。根据 3.5 知 $I \times Z$ 为可数。所以 Q 为可数。

$[0, 1]$ 中之实数可用无限 2 进位数来表示, 由此可知 $[0, 1]$ 与 $\{0, 1\}^I$ (即是从 I 到 $\{0, 1\}$ 的映象的全体) 除去一个可数集合外等价。但 $\{0, 1\}^I$ 为不可数。故 $[0, 1]$ 为不可数。由此可知实数集不可数。

基数的大小, 加法, 乘法以及基数的幂, 在本书没有用到, 说明从略。

§4 关 系

作 A, B 的直积集合 $A \times B$ 。如果 R 为 $A \times B$ 的任一已给子集合, 则 R 用下面的方法规定了 A, B 之间的关系 (relation), 即是:

$$\begin{cases} \text{当 } (a, b) \in R \text{ 时, } a \sim_R b; \\ \text{当 } (a, b) \notin R \text{ 时, } a \not\sim_R b. \end{cases}$$

由此可见, 依照映象 $f: A \rightarrow B$ 的图象 $G(f) (\subset A \times B)$ 能够定 A, B 的关系。

現在, 当 $R \subset A \times B$ 时, 置

$$R' = \{(b, a); (a, b) \in R\} \quad (\subset B \times A).$$

此外, 当 $R_1 \subset A \times B, R_2 \subset B \times C$ 时, 置

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c); \exists b \in B, (a, b) \in R_1 \\ \& (b, c) \in R_2\} \subset A \times C.$$

其次, 当 $A = B$ 时, 以

$$\Delta = \{(a, a); a \in A\} \quad (\subset A \times A)$$

表示对角綫集合。

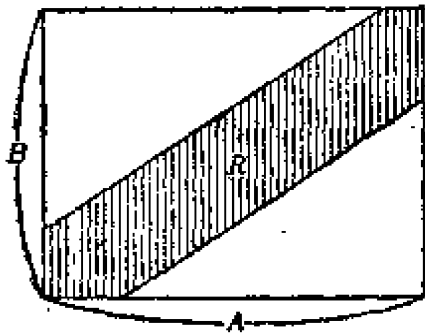


图 4.1

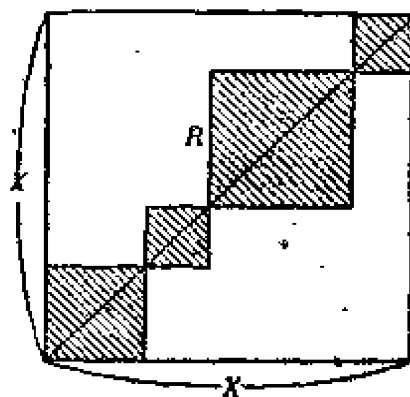


图 4.2

4.1* 所謂在集合 X 上定义了等价关系 \sim , 意指 X 与 X 之間关系有下面条件成立:

- (i) 反射律 对于所有的 $a \in X$, 有 $a \sim a$;
- (ii) 对称律 $a \sim b \Rightarrow b \sim a$;
- (iii) 推移律 $a \sim b \& b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

如果 X 与 X 之間依照 $X \times X$ 的子集合 R 来規定等价关系 \sim , 那么可推出 R 有如下的性質: (i) $\Delta \subset R$, (ii) $R = R'$, (iii) $R \circ R \subset R$ (参看图 4.2)。

4.2* 所謂集合 X 的分割(partition), 意指集合族 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ 滿足下列条件:

- (i) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A = B \text{ or } A \cap B = \emptyset$,
- (ii) $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A = X$.

4.3 当集合 X 的分割 \mathfrak{A} 为已给的时候, 如果

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ 与 } b \text{ 属于同一集合 } A (\in \mathfrak{A}),$$

则 X 得到了等价关系。反之, 任意等价关系, 可定出 X 的分割。

证明 定理的前半段, 对于 4.1 的 (i), (ii), (iii) 等条件, 不言而喻是满足的。只要证明定理的后半部。每一个 $a \in X$, 置 $A_a = \{b; a \sim b\}$ 及 $a \in A_a$; 则有 $A_a = A_b \Leftrightarrow a \sim b$; $A_a \cap A_b = \emptyset \Leftrightarrow a \not\sim b$ 。由此可见, $\mathfrak{A} = \{A_a; a \in X\}$ 就是由等价关系 \sim 定出的分割。证毕

我们把对应于等价关系 \sim 的 X 分割 \mathfrak{A} 也看作为一集合, 并称这集合是由 X 按照 \sim 而得到的商集合 (quotient set), 表示为

$$\mathfrak{A} = X / \sim.$$

对于任意一 $x \in X$, $f: x \rightarrow A_x \in \mathfrak{A}$ 是从 X 到 \mathfrak{A} 上的映象, 称这映象为完全正规映象。

现在来讨论如下的另外一种关系。

4.4* 所谓在集合 X 上定出了的次序关系 \leq , 意思就是说: X 与 X 之间的关系满足下列条件:

- (i) 对所有的 $a \in X$, 有 $a \leq a$;
- (ii) $a \leq b \text{ 且 } b \leq a \Rightarrow a = b$;
- (iii) $a \leq b \text{ 且 } b \leq c \Rightarrow a \leq c$ 。

如果, 从 $X \times X$ 的子集合 R 定出 \leq , 则有 (i) $\Delta \subset R$, (ii) $R \cap R' = \Delta$, (iii) $R \circ R \subset R$ 。

如果集合 X 有次序关系 \leq , 则称该集合为有序集合 (ordered set), 记为 (X, \leq) 。

例 1 自然数全体 I , 整数全体 Z , 实数全体 R 等是以大小关系成有序集合。

例 2 在 $\mathfrak{P}(X)$ 中, 若 $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$, 则 $\mathfrak{P}(X)$ 是有序集合。

例 3 设 X 为有序集合, Y 为任意集合, 如果 $f, g \in X^Y$, $f \leq g \Leftrightarrow$ (所有

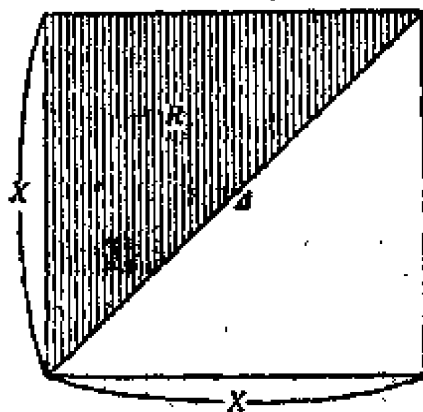


图 4.3

的 $y \in Y$ 有 $f(y) \leq g(y)$), 则 X^Y 也是一有序集合。

4.5* 設有序集合 (X, \leq) 。如果 X 中有一个元素 a_0 , 对于所有的 $a \in X$, 都有 $a \leq a_0$, 則称 a_0 为 X 的**最大元素**。如对所有 $a \in X$, 都有 $a_0 \leq a$, 則称 a_0 为 X 的**最小元素**。

設有一个 $b_0 \in X$, 如对于任一 $a \in X (a \neq b_0)$, 不可能有 $b_0 \leq a$, 則称 b_0 为 X 的一个**极大元素**。反之, 对任一 $a \in X (a \neq b_0)$, 如不可能有 $a \leq b_0$, 則称 b_0 为 X 的一个**极小元素**。

如 X 有最大元素(最小元素), 則只能有一个。可是 X 的极大元素(或极小元素)存在的时候, 可以不止一个而有許多个。

設 A 为有序集合 (X, \leq) 的子集合, 当 $A \leq x$ (即对所有的 $a \in A$, 皆有 $a \leq x$) 时, 称 x 为 A 的一个**上界**。当 $x \leq A$ 时, 就称 x 为 A 的一个**下界**。

設 A 至少有一个上界(下界), 并且在 A 的所有上界(下界)构成的集合中, 如果存在着最小元素 a_0 , 則称 a_0 为 A 的**上确界**(**下确界**), 記为

$$a_0 = \sup A \quad (a_0 = \inf A).$$

4.6* 如果有序集合 (X, \leq) 满足下列的条件:

(iv) 对任意 $a, b \in X$, $a \leq b$ 或 $b \leq a$ 中至少有一种情形成立, 这时称 (X, \leq) 为**綫性有序集合** (linearly ordered set) (如果按照 $R \subset X \times X$ 而規定 \leq , 則由 (iv) 就得出 $X \times X = R \cup R'$)。

例如, 上面的例 1 是綫性有序集合, 但例 2、例 3 則不是了。

4.7* 有序集合 (X, \leq) 称为**归納的** (inductive), 意指: 如 A 为 X 的任一綫性有序子集合(对 X 的序而言), 則在 X 中必有 $\sup A (\in X)$ 。

例 設有集合 X , 而 $\mathfrak{F} \in \mathfrak{P}(X)$ 是一个深透 (filler), 所謂深透就是 \mathfrak{F} 满足下列三条件:

(i) $F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$;

(ii) $F_1 \in \mathfrak{F}, F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_2 \in \mathfrak{F}$;

(iii) $\emptyset \in \mathfrak{F}$.

现置 $F = \{\mathfrak{F}; \mathfrak{F} \in \mathfrak{P}(X), \mathfrak{F} \text{ 是深透}\}$, 即 F 是所有深透的全体所构成的集合, 如果 $\mathfrak{F}_1 \leq \mathfrak{F}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, 那么 F 是一个归纳的有序集合。

证明 设 $A(\subset F)$ 是线性有序集合, 那么 $\mathfrak{F}_0 = \bigcup_{\mathfrak{F} \in A} \mathfrak{F}$ 也是一深透, 显然

$\mathfrak{F}_0 = \sup A$.

证毕

4.8* 在代数系中有一种所谓格 (lattice) 的次序关系。设 L 为有序集合, 并且满足下列条件:

(i) 对任意的 $x, y \in L$, 存在着 $z = \sup \{x, y\}$, 换句话说:

(a) $z \geq x, z \geq y$, (b) 对任意的 z' , 如 $z' \geq x, z' \geq y$, 则有 $z' \geq z$.

(ii) 对任意的 $x, y \in L$, 存在着 $w = \inf \{x, y\}$, 即 (a) $z \leq x, z \leq y$, (b) 若任意 z' , 而 $z' \leq x, z' \leq y$, 则有 $z' \leq z$.

这时, 称 L 为格, 记为

$$z = x \cup y, w = x \cap y,$$

称 z 为 x 与 y 的结 (join), w 为 x 与 y 的交 (meet)。

例 1 实数集合 R , 置 $a \cup b = \max(a, b)$, $a \cap b = \min(a, b)$, 则 R 就是格。

例 2 $\mathfrak{P}(X)$ 是一个格, 集合的运算 $A \cap B, A \cup B, (A, B \in \mathfrak{P}(X))$ 看作是格的运算。

例 3 设 $F = R^X$ (X 为任意集合), $f, g \in F$, 置 $f \leq g \Leftrightarrow$ (所有的 $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$) (4.4*例 3) 并且

$$(f \cup g)(x) = \max(f(x), g(x)); (f \cap g)(x) = \min(f(x), g(x)),$$

那么 F 就是格。

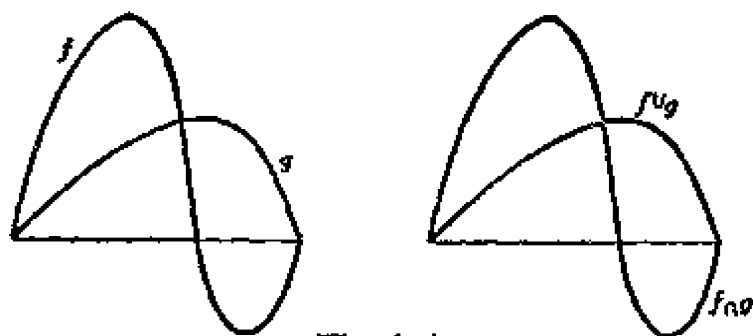


图 4.4

§5 Zorn 公理

以上虽然从朴素的立場叙述了集合論的一部分內容，但是为了更进一步展开理論，就必須有下面的一些公理。

在这些公理中，有所謂 Cantor “整列可能的公理”，意思就是說：“对于任一集合 X ，可以定出适当的次序关系，使任意子集合 $A (\subset X)$ 皆有最小元素”。其次就是 Zermelo 的“選擇公理”，那就是說：“設有集合族 $\mathfrak{A} = \{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ ，而 $A_\lambda \neq \emptyset$ ，則直积集合 $A = \prod_{\lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ ”。選擇公理是与整列公理等价的。Zorn 作出了与这些公理等价的下述命题^①，这个命题在实际上容易应用，称为 Zorn 公理。

5.1 Zorn 公理 如有序集合 (X, \leq) 是归納的，則至少必有一个极大元素。

例1 設 \mathfrak{F}_0 为集合 X 上的一个深透，則至少有一个包含 \mathfrak{F}_0 的极大元素存在。

証明 考虑包含 \mathfrak{F}_0 的所有深透的全体 F_0 ，按照 §4, 4.7 例题知 F_0 是归納的。因此按照 Zorn 公理知 F_0 有极大元素存在。 証毕

例2 讓我們来証明在任一向量空間 V 中必有基底存在。所謂 $\{x_\lambda; \lambda \in \Lambda\} (\subset V)$ 是 V 的基底，意指：(i) 任意有限个 $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}$ 綫性无关，(ii) 对任意 $y \in V$ ，可以适当选取有限个 $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_r}$ ，使得 $y = \sum_{i=1}^r a_i x_{\lambda_i}$ (a_i 为实数)。

首先，設 V 的任意子集合 $U = \{u_\mu; \mu \in \mu\}$ ，在其中任意有限个 $u_{\mu_1}, \dots, u_{\mu_n}$ 为綫性无关，用 \mathfrak{U} 表示所有这样的 U 的全体。当 $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ ，而 $U_1 \subset U_2$ 时，定义 $U_1 \leq U_2$ ，則 \mathfrak{U} 显然是归納的有序集合。按照 Zorn 公理， \mathfrak{U} 有极大元素 $U_0 = \{u_\mu\}$ 存在，容易驗證 U_0 就是 V 的一个基底。

① 以上三公理是等价的証明，参看卷末文献，[1] 或 [6] (p. 32-33)。

第 2 章 拓 扑 空 間

第一章只就一般的集合作了叙述；本章將討論定义了拓扑的集合。拓扑理論是 G. Cantor 为在 Euclid 空間的集合（即点集合）而創立的。現在使用拓扑理論的大致有：

(i) 使用于与 Euclid 空間点集合性質有关的場合 [如微积分 (見高木貞治著解析概論第一章) 及函数論中所应用的]。

(ii) 使用于与函数空間关联在一起的場合，如 Hilbert 空間論及广义函数論方面。

(iii) 使用于 Riemann 面, Lie 群, 一般以几何为对象的流形体方面。其中 (i) 是最直觀的, 因而在理解上不会发生困难。(ii) 主要使用距离空間的理論, 所以一般不需要更細致的理論。(iii) 是最特殊的对象。虽然拓扑理論的应用方面不同, 但内容上并没有什么变化, 因此可把它总括起来作为拓扑空間理論来进行論述。讀者可随时联系最直觀并最容易理解的 Euclid 空間图形来理解。这一理論是过渡到另一些理論的阶梯, 所以定义很多, 而相形之下, 結論較少。假若在集合論的基础上, 进而对抽象的拓扑概念的研究能引起兴趣, 那就很好。本书因篇幅限制, 有些地方不能作詳細的証明, 希望在閱讀时对这些地方加以补足。

§ 6 Euclid 空間

在 Euclid 空間 $E^{(n)}$ 中, 作正交坐标系, 使点 $P \in E^n$ 与坐标 (x_1, x_2, \dots, x_n) 对应, 由是集合 $E^{(n)}$ 与

$$R^n = R \times R \times \dots \times R \quad (n \text{ 个})$$

等价。这里 R 是实数集合。既然 $E^{(n)}$ 与 R^n 等价, 故可把它們等

量齐观。 R^n 中的点用 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 等来表示。 R^n 中任意两点 x, y 的距离 $\rho(x, y)$ 定义为

$$\rho(x, y) = \{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2\}^{1/2}.$$

显然, $\rho(x, y)$ 具有下面的性质:

MI 对于任意 x, y 有 $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

MII $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

MIII $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (三角形不等式)。

在 Euclid 空间中,许多性质都可由这个距离函数 $\rho(x, y)$ 引出来。在这里,我们给以一般定义如下:

6.1* 设有一集合 X , 如果在其中定义了一个距离函数 (metric) $\rho(x, y)$ (即映象 $\rho(x, y): X \times X \rightarrow R$), 满足 MI, MII, MIII, 则称 X 为距离空间, 记为

$$(X, \rho).$$

例 1 在实数 R 中, 置 $\rho_1(a, b) = |a - b|$ ($a, b \in R$), 那么 (R, ρ_1) 是距离空间。

例 2 n 维 Euclid 空间 (R^n, ρ_n) 是距离空间。

例 3 设 A 为距离空间 (X, ρ) 的子集合, 如果置 $\rho_A = \rho|_{A \times A}$ (即对 $a, b \in A$, 有 $\rho_A(a, b) = \rho(a, b)$), 那么 (A, ρ_A) 也是距离空间。

例 4 设 $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ 都是距离空间, $Z = X \times Y$, 如果置 $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \{\rho_X(x_1, x_2)^2 + \rho_Y(y_1, y_2)^2\}^{1/2}$, 则 (Z, ρ) 也是距离空间。

例 5 设 (X, ρ_X) 为距离空间, Y 为任意集合, 对于 $f, g \in X^Y$ ($Z = X^Y$) 置 $\rho(f, g) = \sup \{\rho_X(f(y), g(y)); y \in Y\}$, 那末 (Z, ρ) 也是距离空间。

例 6 (Hilbert 空间) 设 $X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots); x_n \in R, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$, 对于 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in X$, 定义它的距离为

$$\rho_2(x, y) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right\}^{1/2},$$

那么 (X, ρ_2) 是距离空间, 用 $l^{(2)} = (X, \rho_2)$ 表示。以后可以看到, $l^{(2)}$ 是一个 (可分的) Hilbert 空间。

例 7 任意集合 X , 如果置 $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$ ($x \neq y$), 则 (X, ρ) 也是距离空间。

其他距离空間的例子, 参看 §16。

在距离空間中, 可以定义收斂、极限、連續等概念。定义这些概念虽然有各种各样的方法, 但本书采用以邻域及开集概念作为基础的方法。

6.2* 在距离空間 (X, ρ) 中, 对于 $x \in X, \varepsilon > 0$, 置

$$V(x, \varepsilon) = \{y; y \in X, \rho(x, y) < \varepsilon\},$$

那么 $V(x, \varepsilon)$ 为 X 的子集合, 我們称它为 x 的 ε 邻域 (neighborhood) (或称近傍)。 x 的 ε 邻域的全体用 $\mathfrak{B}(x) = \{V(x, \varepsilon); \varepsilon > 0\}$ 表示。

$\mathfrak{B}(x)$ 具有下列性質:

V I $x \in X, V \in \mathfrak{B}(x) \Rightarrow x \in V$.

V II 設 $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}(x)$, 可适当选取 $V_3 \in \mathfrak{B}(x)$, 使得

$$V_3 \subset V_1 \cap V_2.$$

V III 設 $V \in \mathfrak{B}(x), y \in V$, 則存在着 $V_y \in \mathfrak{B}(y)$, 使得

$$V_y \subset V.$$

証明 V I 不言而喻。

V II 設 $V_1 = V(x, \varepsilon_1), V_2 = V(x, \varepsilon_2)$, 只要取 $V_3 = V(x, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ 就有 $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

V III 設 $V = V(x, \varepsilon), \rho(x, y) = \varepsilon_1 < \varepsilon$, 而 $V_y = V(y, \varepsilon - \varepsilon_1)$ 就是所求的。 証畢

6.3* 設 (X, ρ) 为距离空間, 所謂 $U(\subset X)$ 是 $x(\in X)$ 的邻域, 意指: 存在一个 $\varepsilon > 0$, 而

$$x \in V(x, \varepsilon) \subset U.$$

x 的邻域 U 的全体記为 $\mathfrak{U}(x)$, $\mathfrak{U}(x)$ 具有如下的性質:

UI 設 $x \in X, U \in \mathfrak{U}(x)$, 則 $x \in U$.

UII 若 $U_1 \in \mathfrak{U}(x), U_1 \subset U_2$, 則 $U_2 \in \mathfrak{U}(x)$.

UIII 若 $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(x)$, 則 $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}(x)$.

UIV 对于 $U \in \mathcal{U}(x)$, 可取 $V \in \mathcal{U}(x)$, $V \subset U$, 使对所有的 $y \in V$ 皆有 $U \in \mathcal{U}(y)$.

证明 从满足 VI, VII, VIII 条件的 $\mathcal{B}(x) = \{V(x, \varepsilon); \varepsilon > 0\}$ 可导出 UI ~ UIV. 例如证明 UIV, 只要取 $V = V(x, \varepsilon)$, $x \in V \subset U$, 并参照性质 VIII 就可以了. 证毕

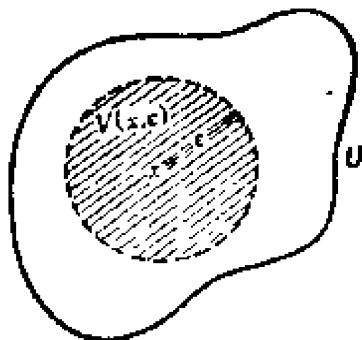


图 6.1

以上, 从 Euclid 空间出发定义了距离空间, 从而导出了邻域系的性质. 更进一步, 就是根据邻域系的性质来研究拓扑的性质. 虽然有几个概念都可以作为叙述拓扑性质的基础, 但在这里先从邻域系方面着手.

§7 拓扑空间

7.1* 在集合 X 中, 如果对于每一个 x , 定义了一个集合族 $\mathcal{U}(x) (\neq \emptyset)$, 并且满足 6.3* UI, UII, UIII, UIV 诸条件, 则称 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x); x \in X\}$ 为邻域系, 而称 $U \in \mathcal{U}(x)$ 为 x 的邻域. 当我们把 X 与 \mathcal{U} 合并考虑的时候, 称它为拓扑空间 (topological space), 记为

$$(X, \mathcal{U}),$$

或称为由 \mathcal{U} 规定的 X 的拓扑. 如果 $x \in X$, 则称 x 为 X 的点.

例1 设 (X, ρ) 为距离空间, 又设 $\mathcal{U}_\rho(x)$ 为依照 6.3* 定义的邻域系, 则 (X, \mathcal{U}_ρ) 为拓扑空间.

例2 对于集合 X , 置 $\mathcal{U}(x) = \{U; x \in U \subset X\}$, 则 X 是拓扑空间, 本例题与 §6 的例7互相对应.

例3 对于集合 X , 若置 $\mathcal{U}(x) = \{X\}$, 则它也是拓扑空间.

7.2* 设 (X, \mathcal{U}) 是拓扑空间, 对于任意子集合 $E (\subset X)$,

(i) 若 E 是 x 的邻域, 则称 x 为 E 的内点.

(ii) 若 $E^c = X - E$ 为 x 的邻域, 则称 x 为 E 的外点。

(iii) 如 x 既不是 E 的内点, 也不是 E 的外点 (即 x 的任一邻域与 E 及 E^c 都相交), 则称 x 为 E 的界点。

E 的内点的全体称为 E 的内部 (或称开核), 用 E° 或 E^o 表示。

E 的外点的全体称为 E 的外部, 用 E^e 表示。

E 的界点的全体称为 E 的边界 (boundary), 用 E^r 表示。

$\bar{E} = E^\circ \cup E^r$ 称为 E 的闭包 (closure)。

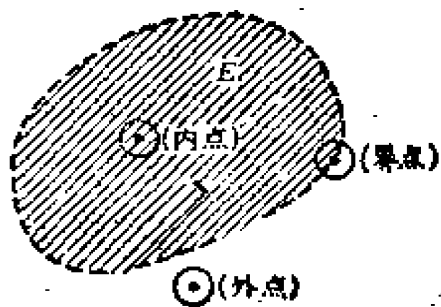


图 7.1

由上面定义, 立即得出:

$$E^\circ \subset E \subset \bar{E}, E^e = (E^\circ)^o, E^r = (E^\circ)^r.$$

7.3* 当 $E = E^\circ$, 即任意 $x \in E \Rightarrow E \in \mathcal{U}(x)$ 时, 称 E 为开集 (open set)。

设 $\mathcal{O}(X)$

为拓扑空间 (X, \mathcal{U}) 的所有开集 $O (\subset X)$ 的全体, 那么有下列性质:

OI $X \in \mathcal{O}(X), \emptyset \in \mathcal{O}(X).$

OII $O_1, O_2 \in \mathcal{O}(X) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(X).$

OIII $O_\lambda \in \mathcal{O}(X) (\lambda \in A) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in A} O_\lambda \in \mathcal{O}(X).$ (这里 A 可以具有任意基数。)

证明 OI 显然是正确的, 至于 OII, OIII, 分别可由 UII 及 UII 导出来。 证毕

7.4 对于任意 X 的子集合 E , E° 是 E 中 ($E^\circ \subset E$) 最大的开集。

证明 (i) 设 $x \in E^\circ$, $E = U (\in \mathcal{U}(x))$, 取满足条件 UIV 的

V . 因为对所有的 $y \in V$ 皆有 $U \in \mathcal{U}(y)$, 由此可見, $U \in \mathcal{U}(y)$, 所以 $V \subset E^\circ$, 也就是說 E° 是开集。

(ii) 現在設 $O \in \mathcal{O}(X)$ 及 $O \subset E$, 对于 $x \in O$ 就有 $O \in \mathcal{U}(x)$, 所以 $E \in \mathcal{U}(x)$. 由此可見, $O \subset E^\circ$. 証毕

[問題] 設 $A, B \subset X$, 求証 (i) $X^\circ = X$, (ii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, (iii) $A^\circ \subset A$, (iv) $A^{\circ\circ} = A^\circ$.

7.5* 当 $E = \bar{E}$ 时, 称 E 为閉集 (closed set). $E = \bar{E}$ 这一条件与

$$E = E^\circ \cup E^r \Leftrightarrow E^r = E^r \Leftrightarrow E^r = (E^\circ)^\circ$$

等价, 亦即与 E° 为开集等价。

拓扑空間 (X, \mathcal{U}) 的所有閉集 $A (\subset X)$ 的全体, 用

$$\mathfrak{K}(X)$$

来表示, 它具有下面的性質:

AI $X \in \mathfrak{K}(X), \emptyset \in \mathfrak{K}(X)$.

AII $A_1, A_2 \in \mathfrak{K}(X) \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{K}(X)$.

AIII $A_\lambda \in \mathfrak{K}(X) (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{K}(X)$.

証明 設 $A \in \mathfrak{K}(X)$, 則 $A^\circ = O \in \mathcal{O}(X)$, 因此 AI, AII, AIII 可由 OI, OII, OIII 导出來。 証毕

7.6 对于任意 X 的子集 E , \bar{E} 是含有 $E (E \subset \bar{E})$ 的最小閉集。

証明 (i) 从 $E^\circ = (E^\circ)^\circ$ 是开集, 得出 $\bar{E} = (E^\circ)^\circ$ 为閉集。

(ii) 設 $E \subset A, A \in \mathfrak{K}(X) \Rightarrow E^\circ \supset A^\circ, A^\circ \in \mathcal{O}(X)$, 由此 $A^\circ \subset (E^\circ)^\circ = \bar{E}$, 所以, $A \supset (E^\circ)^\circ = \bar{E}$. 証毕

[問題] 对于 $A, B \subset X$, 有 (i) $\bar{\emptyset} = \emptyset$, (ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, (iii) $A \subset \bar{A}$, (iv) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

7.7* 所謂点 x 是 $E (\subset X)$ 的聚点 (或集积点), 意指, x 的任一邻域至少含有 E 中除 x 本身外的一个点。 E 的聚点全体所成的

集合,称为 E 的导集,用 E^o 表示。

[問題] 証 $\bar{E} = E \cup E^o$ 。

7.8* 設 $x \in E (\subset X)$, 如果存在一个 $U \in \mathcal{U}(x)$ 使得

$$E \cap U = \{x\},$$

則称 x 为 E 的孤立点。

所謂 E 为完全集,是指: E 是閉集合,而且 E 中沒有孤立点。

[問題] 証 E 是完全集的必要与充分条件为: $E = E^o$ 。

7.9* 如果 $\bar{E} = X$, 称 $E (\subset X)$ 为处处稠密集合。

如果 $(\bar{E})^o = \emptyset$, 称 $E (\subset X)$ 为疏集合。

[問題] 設 E_1, E_2 是疏集合,那么 $E_1 \cup E_2$ 亦是疏集合,試証明之。

例 1 設 $X = \mathbb{R}$, Q 为有理数集合,則 Q 为处处稠密集合。

例 2 設 $X = \mathbb{R}$, 則 Cantor 集合 C 不但完全而且是疏集合。这里所謂 Cantor 集 C , 是指:

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1],$$

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1], \dots,$$

$$C_n = \bigcup [i/3^n, (i+1)/3^n] \quad (\text{在这里, } i \text{ 跑遍 } \varepsilon_0 2 + \varepsilon_1 (2 \times 3) + \dots + \varepsilon_{n-1} (2 \times 3^{n-1}) (\varepsilon_i = 0 \text{ 或 } 1) \text{ 的全体}), \dots$$



图 7.3

$$\text{置} \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n,$$

这就是 Cantor 集合。

設 E 为 X 的子集合,如果 E 可表示为充其量可数个疏集合之和,那么称 E 为第 1 类集合 (或称第 1 綱; set of the first category)。不是第 1 类集合的集合称为第 2 类集合 (或称第 2 綱)。

7.10* 所謂拓扑空間 (X, \mathcal{U}) 是 Baire 空間,是指: 如果任一集合 $E \subset X$ 是第 1 类集合,則 $\bar{E}^o = X$ (即 E^o 在 X 中处处稠密)。

[問題] 証下面 (i), (ii), (iii) 的每一項都是 (X, \mathcal{U}) 为 Baire 空間的充要条件:

(i) 不空的开集合是第 2 类集合。

(ii) 設 F_1, F_2, \dots 为 X 的閉集合, 若 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 有內点, 則至少有一个 F_n 存在着內点。

(iii) 可数个处处稠密的开集合之交亦是处处稠密集合。

讓我們來說明一下下面的可数公理。

7.11* 設 (X, \mathcal{U}) 为拓扑空間。如果对于任意点 $x (\in X)$ 存在着 $U_n(x) (n=1, 2, \dots) (\in \mathcal{U}(x))$, 使得任意一个 $U(x) \in \mathcal{U}(x)$ 都含有某一个 $U_n(x)$, 我們就說 (X, \mathcal{U}) 滿足第1可数公理。而 $\{U_n(x)\}$ 称为 $\mathcal{U}(x)$ 的可数基底。例如, 在距离空間 (X, ρ) 所确定的拓扑空間, $\left\{V\left(x, \frac{1}{n}\right); n=1, 2, \dots\right\}$ 就是 $\mathcal{U}(x)$ 的可数基底。

7.12* 設 (X, \mathcal{U}) 为拓扑空間。如果存在着可数个开集合 $\{O_1, O_2, \dots, O_n, \dots\} = B(\mathcal{O})$, 对于任意的 $O \in \mathcal{O}$ 可表示为包含于 O 的 $O_n \in B(\mathcal{O})$ 的和集, 則称 (X, \mathcal{U}) 为滿足第2可数公理。这时, $B(\mathcal{O}) = \{O_1, O_2, \dots\}$ 也称为 $\mathcal{O}(X)$ 的可数基底。

7.13* 在 (X, \mathcal{U}) 拓扑空間中, 設 $\{E_\lambda; \lambda \in A\}$ 为 X 的子集合族, 如果 $X = \bigcup_{\lambda \in A} E_\lambda$, 就称这集合族为 X 的复盖 (covering)。特別当所有 E_λ 为开集合时, 称 $\{E_\lambda\}$ 为开复盖。

7.14 設拓扑空間 (X, \mathcal{U}) 滿足第2可数公理, 則对于任意 X 的开复盖 $\{O_\lambda; \lambda \in A\}$, 存在着可数子复盖 $\{O_{\lambda_n}; n=1, 2, \dots\}$ 。

証明 設 $B(\mathcal{O}) = \{O_n; n=1, 2, \dots\}$ 为 $\mathcal{O}(X)$ 的可数基底, 对于每一个 O_λ , 如果在包含它的 O_λ 中选取其中一个 O_{λ_n} , 則 $\{O_{\lambda_n}\}$ 的全体就成为 X 的可数子复盖。 証毕

§8 連續映象

8.1 前面已証明, 在拓扑空間 (X, \mathcal{U}) 中, X 的开集 $O (\subset X)$ 的全体 $\mathcal{O}(X)$, 滿足 7.3 的条件 OI, OII, OIII。現在反过来, 在集合 X 中先給出一个集合族 $\mathcal{O}(X) (\subset \mathcal{P}(X))$, 并且让它滿足

OI, OII, OIII, 諸条件, 这时, 对于 $x \in X$, 滿足

$$x \in O \subset U \quad (O \in \mathfrak{O}(X))$$

的所有 $U (\subset X)$ 的全体用 $\mathfrak{U}(x)$ 来表示。不难看出 $\mathfrak{U}(x)$ 滿足 UI, UII, UIII, UIV 等条件, 而且关于这个邻域系导出来的开集合全体, 容易验证是与一开始給出的 $\mathfrak{O}(X)$ 完全一致的。

[問題] 証明以上的命題。

由上可知, X 的拓扑由于給出了 $\mathfrak{O}(X)$ 而被規定。在这样的意义下, 可以把拓扑空間 (X, \mathfrak{U}) 改写成

$$(X, \mathfrak{O}(X))$$

的形式。

8.2* 在两个拓扑空間 $(X, \mathfrak{U}), (Y, \mathfrak{U}')$ 中, 所謂映象 $f: X \rightarrow Y$ 在点 $x \in X$ 連續, 意指:

$$f^{-1}(\mathfrak{U}(f(x))) \subset \mathfrak{U}(x),$$

即对于任意 $U' \in \mathfrak{U}(f(x))$, 都有 $f^{-1}(U') \in \mathfrak{U}(x)$ 。

[問題] 对于距离空間 $(X, \rho), (Y, \rho')$ 所决定的拓扑空間 $(X, \mathfrak{U}_\rho), (Y, \mathfrak{U}_{\rho'}),$ 映象 $f: X \rightarrow Y$ 在点 x 連續的充要条件为: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 可选取某一个 $\delta > 0$, 使得 $V_{\rho'}(f(x), \varepsilon) \supset f(V_\rho(x, \delta))$ 。

如映象 $f: X \rightarrow Y$ 在 X 中每一点 x 都連續, 簡称 f 为連續。

8.3 在拓扑空間 $(X, \mathfrak{O}(X)), (Y, \mathfrak{O}(Y))$ 中, 映象 $f: X \rightarrow Y$ 是連續的充要条件为:

$$f^{-1}(\mathfrak{O}(Y)) \subset \mathfrak{O}(X).$$

証明 設 f 为連續映象。又設 $O' \in \mathfrak{O}(Y)$, $f^{-1}(O') = O$, 則对于任一个 $x \in O$, 就有 $f(x) \in O'$, $f^{-1}(O') = O \in \mathfrak{U}(x)$. 由此 $O \in \mathfrak{O}(X)$. 反之, 設 $f^{-1}(\mathfrak{O}(Y)) \subset \mathfrak{O}(X)$. 設对任一点 $x \in X$, 而 $U' \in \mathfrak{U}(f(x))$, 則取滿足 $f(x) \in O' \subset U'$ 这样条件的 $O' \in \mathfrak{O}(Y)$, 那么由于 $x \in f^{-1}(O') \subset f^{-1}(U')$, $f^{-1}(O') \in \mathfrak{O}(X)$, 可得 $f^{-1}(U') \in \mathfrak{U}(x)$, 因此 f 在 x 为連續。 証毕

[問題] 証 $f: X \rightarrow Y$ 連續的充要条件为: $f^{-1}(\mathfrak{U}(Y)) \subset \mathfrak{U}(X)$.

8.4 即使映象 $f: X \rightarrow Y$ 为連續, 也不一定有 $f(\mathfrak{O}(X)) \subset \mathfrak{O}(Y)$ 或 $f(\mathfrak{U}(X)) \subset \mathfrak{U}(Y)$. 当 $f(\mathfrak{O}(X)) \subset \mathfrak{O}(Y)$ 时, 称 f 为开映象, 当 $f(\mathfrak{U}(X)) \subset \mathfrak{U}(Y)$ 时則称为閉映象.

[問題] 求作 f 为連續而不为开映象(閉映象)的例子.

8.5 在拓扑空間 $(X, \mathfrak{O}(x)), (Y, \mathfrak{O}(Y)), (Z, \mathfrak{O}(Z))$ 中, 設映象 $f: X \rightarrow Y$ 及 $g: Y \rightarrow Z$ 都連續, 則 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 也連續.

証明 設 $f^{-1}(\mathfrak{O}(Y)) \subset \mathfrak{O}(X)$, $g^{-1}(\mathfrak{O}(Z)) \subset \mathfrak{O}(Y)$, 从而有 $(g \circ f)^{-1}(\mathfrak{O}(Z)) \subset f^{-1}(\mathfrak{O}(Y)) \subset \mathfrak{O}(X)$. 証毕

8.6* 在两拓扑空間 $(X, \mathfrak{O}(X)), (Y, \mathfrak{O}(Y))$ 中, 如果存在一个完全 1-1 的映象 $f: X \rightarrow Y$, 而 f, f^{-1} 都連續, 則称 $(X, \mathfrak{O}(X))$ 与 $(Y, \mathfrak{O}(Y))$ 为同胚 (homeomorphic), 而称 f 为同胚映象.

完全 1-1 的映象 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚映象的充要条件为:

$$f(\mathfrak{O}(x)) = \mathfrak{O}(Y) \quad (f^{-1}(\mathfrak{O}(Y)) = \mathfrak{O}(X)).$$

(充要条件也可写成: 对于所有的 $x \in X$, 都有 $f(\mathfrak{U}(x)) = \mathfrak{U}(f(x))$, 或者, 对于所有的 $y \in Y$ 都有 $f^{-1}(\mathfrak{U}(y)) = \mathfrak{U}(f^{-1}(y))$.)

以拓扑空間的理論与代数学上的群的理論作一对比, 就可看到如下的对照:

拓扑空間 \leftrightarrow 群, 連續映象 \leftrightarrow 准同构映象, 同胚 \leftrightarrow 同构.

8.7 設在同一集合 X 中, 有由两个拓扑定义出的拓扑空間 (X, \mathfrak{O}) 和 (X, \mathfrak{O}') . 当恒等映象 $1_X: (X, \mathfrak{O}) \rightarrow (X, \mathfrak{O}')$ 为連續时, 就称 (X, \mathfrak{O}) 的拓扑比 (X, \mathfrak{O}') 的拓扑强 (或者相反的說 (X, \mathfrak{O}') 的拓扑比 (X, \mathfrak{O}) 的拓扑弱). 不难看出, (X, \mathfrak{O}) 比 (X, \mathfrak{O}') 强等价于 $\mathfrak{O}' \subset \mathfrak{O}$.

例 在集合 X , 設 $\mathfrak{O}_d = \mathfrak{P}(X)$, 那么 (X, \mathfrak{O}_d) 是拓扑空間. 又設 $\mathfrak{O}_w = \{X, \emptyset\}$, 則 (X, \mathfrak{O}_w) 亦为拓扑空間. 依照上面的定义, 易知 (X, \mathfrak{O}_d) 为最强拓扑, 而

(X, \mathcal{O}_w) 为最弱拓扑。

§9 拓扑空间的构成

从已知拓扑空间来定义新的拓扑空间有好几种方法,兹举二、三种方法说明如下。

9.1* 设 X 为一个集合, $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 为已给映象。置

$$\mathcal{O}(X) = f^{-1}(\mathcal{O}(Y)),$$

那么 $\mathcal{O}(X)$ 必然满足 OI, OII, OIII 诸条件。这样定出的拓扑空间 $(X, \mathcal{O}(X))$, 称为从 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 由 f (即依赖于 f) 诱导的拓扑空间。在这时, $f: X \rightarrow Y$ 为连续映象。

[问题] 9.1* 定出的拓扑空间 $(X, \mathcal{O}(X))$ 是使 $f: X \rightarrow Y$ 为连续的所有 X 的拓扑中最弱的拓扑, 试证明之。

9.2* 特殊情形是: 设 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 是拓扑空间, 而 X 是 Y 的子集合 ($X \subset Y$), 又 $\iota: X \rightarrow Y$ 是一恒等映象, 即 $\iota(x) = x (x \in X)$ 。这时, 由

$$\mathcal{O}(X) = \iota^{-1}\mathcal{O}(Y) = \{X \cap O; O \in \mathcal{O}(Y)\}$$

定出的拓扑空间 $(X, \mathcal{O}(X))$, 称为 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 的拓扑子空间 (或称相对拓扑空间)。

[问题] 设 (X, \mathcal{O}_ρ) 为由距离空间 (X, ρ) 所定义的拓扑空间, 而 $(A, \mathcal{O}_{\rho_A})$ ($A \subset X$) 是由 (A, ρ_A) 所定义的拓扑空间, 则后者为前者的拓扑子空间。

9.3* 设 $(X, \mathcal{O}(X))$, $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 为两个拓扑空间。对于 $Z = X \times Y$, 置

$$\mathcal{O}^*(Z) = \{pr_X^{-1}(A) \cap pr_Y^{-1}(B) = A \times B;$$

$$A \in \mathcal{O}(X), B \in \mathcal{O}(Y)\},$$

$$\mathcal{O}(Z) = \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda^*; O_\lambda^* \in \mathcal{O}^*(Z)\}.$$

(其中 \bigcup_Λ 为任意基数的集合的和集。) 那么 $\mathcal{O}(Z)$ 必然满足 OI, OII, OIII 等条件。我们称 $(Z, \mathcal{O}(Z))$ 为 $(X, \mathcal{O}(X))$ 与 $(Y,$

$\mathcal{O}(Y))$ 的直积拓扑空间。不难看出, $pr_X: Z \rightarrow X$ 及 $pr_Y: Z \rightarrow Y$ 为连续映射, 并且是开映射。

[问题] $(X, \mathcal{O}(X))$ 与 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 的直积拓扑空间 $(Z, \mathcal{O}(Z))$, 是能使 $pr_X: Z \rightarrow X$ 及 $pr_Y: Z \rightarrow Y$ 为连续的 Z 的最弱拓扑。

9.4* 设 $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ ($\lambda \in A$) 为拓扑空间。 $Z = \prod_{\lambda \in A} X_\lambda$ 是直积集合, 置

$$\mathcal{O}^*(Z) = \left\{ \bigcap_{i=1}^n pr_{\lambda_i}^{-1}(O_{\lambda_i}); n=1, 2, \dots, \lambda_i \in A, O_{\lambda_i} \in \mathcal{O}_{\lambda_i} \right\}$$

(此处 pr_{λ_i} 为 $Z \rightarrow X_{\lambda_i}$ 的射影) 及

$$\mathcal{O}(Z) = \left\{ \bigcup_{\mu \in M} O_\mu^*; O_\mu^* \in \mathcal{O}^*(Z) \right\}$$

(M 的基数为任意的), 则 $\mathcal{O}(Z)$ 满足 OI, OII, OIII 诸条件。这时称 $(Z, \mathcal{O}(Z))$ 为直积拓扑空间。显然 $pr_\lambda: Z \rightarrow X_\lambda$ 为连续开映射。

[问题 1] 直积拓扑空间是能使所有 pr_λ ($\lambda \in A$) 都连续的最弱拓扑。

[问题 2] 由 Euclid 空间 (R^n, ρ_n) 定义的拓扑空间 $(R^n, \mathcal{O}_{\rho_n})$, 与由 (R, ρ_1) 所定义的拓扑空间 $(R, \mathcal{O}_{\rho_1})$ 的 n 个直积空间是一致的。

9.5* 设 $(X, \mathcal{O}(X))$ 为拓扑空间, Y 为任意一集合, 并设 $f: X \rightarrow Y$ 为完全映射 (即 $f(X) = Y$), (亦可把 Y 看作 X 的商空间, 而把 f 看作完全正规映射), 置

$$\mathcal{O}(Y) = \{B; B \subset Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{O}(X)\},$$

则 $\mathcal{O}(Y)$ 满足 OI, OII, OIII。这时称 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 为商拓扑空间。

例 1 在 9.4* 中, 从 $(Z, \mathcal{O}(Z))$ 依赖于 $pr_X: Z \rightarrow X$ 得到的商拓扑空间 $(X, \mathcal{O}(X))$ 是与最初的 X 拓扑一致的。

例 2 设 $X = R^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, 以 P^n 表示通过原点的所有直线的全体。在 P^n 上定义的商拓扑空间, 称为 n 维射影空间。

例 3 由 $X = R, Y = R/Z, f: x \rightarrow x + Z$ ($\in R/Z$) 定义的商拓扑空间 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ 与平面上的单位圆 $S^1 = \{e^{2\pi i r}; r \in R \bmod Z\}$ 同胚。

[问题] Y 的商拓扑是使 $f: X \rightarrow Y$ 为连续的 Y 的最强拓扑。

用以上方法, 从 Euclid 空间出发, 也可以导出许多形形色色

的拓扑空間。

§ 10 連通性

10.1* 所謂拓扑空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ 为連通的 (connected) 是指: 在 $\mathcal{O}(X)$ 中不存在有两个 $O_1, O_2 \in \mathcal{O}(X)$ ($O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset$), 滿足

$$X = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

根据这一定义, 立即可知: 在拓扑空間 $(X, \mathcal{O}(X)), (Y, \mathcal{O}(Y))$ 中, 如果 X 連通, 而 $f: X \rightarrow Y$ 为完全連續映象, 則 Y 也是連通的。

10.2* 設 A 为拓扑空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ 的子集合, 如拓扑子空間 $(A, \mathcal{O}(A))$ 为連通, 則称 A 为連通的。

[問題] 試証綫段 $[a, b]$ 为連通的。

10.3 (i) 設 $A_1, A_2 \subset (X, \mathcal{O}(X))$, A_1, A_2 为連通, 且 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, 則 $A_1 \cup A_2$ 也連通。

(ii) 設 $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 都是連通集, 且 $\bigcap_{\lambda} A_\lambda \neq \emptyset$, 則 $\bigcup_{\lambda} A_\lambda$ 也連通。

(iii) 若 A 为連通, 則其閉包 \bar{A} 也連通。

[問題] 証明上面的命題。

10.4* 在拓扑空間 (X, \mathcal{O}) 中, 作所有含点 x 的連通集 X 的子集之和集, 則这一集合一定是含 x 的最大連通集 ($\subset X$)。我們称这最大連通集为含 x 的成分。 (X, \mathcal{O}) 中的任两个成分或者重合, 或者不相交。因此不难看出, X 可表示为互不相交的成分之和。

例 1 在 Cantor 集合 C 中, 对每一点 x , 含 x 的成分为 $\{x\}$ 。

例 2 R 的开集合 O 中含任一点的每一点成分为开区間, 从而任意开集合可表示为

$$O = \bigcup_n I_n \quad (I_m \cap I_n = \emptyset, (m \neq n)),$$

即 O 可表示为充其量为可数个开区間 I_n 的和。

10.5* 在拓扑空間 (X, \mathcal{O}) 中, 閉区間 $I = [0, 1]$ 的連續映象 $f: I \rightarrow X$ 的象 $f(I)$ 称为 X 上的弧。如果 X 上的任意两点都可以

結成弧,就称 X 为弧状連結。凡是弧状連結的拓扑空間一定为連通的,但是,反过来不一定为真。

§ 11 分离条件 (Hausdorff 空間与正規空間)

11.1* 如果拓扑空間 (X, \mathcal{O}) 满足下面的 H 条件,則称它为 Hausdorff 空間:

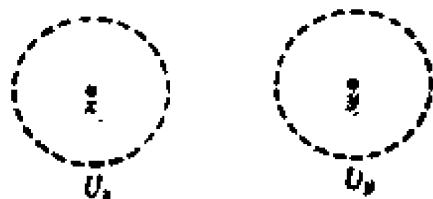


图 11.1

H 对于任意相异的两点 x, y ($\in X$), 存在着 $U_x \in \mathcal{U}(x), U_y \in \mathcal{U}(y)$, 使得 $U_x \cap U_y = \emptyset$.

在 Hausdorff 空間,仅由一点所組成的子集合 $\{x\}$ 必然是閉集。

例 1 由距离空間 (X, ρ) 定义的拓扑空間 (X, \mathcal{O}_ρ) 为 Hausdorff 空間,因为当 $\alpha = \rho(x, y) > 0$ 时,就有 $\forall (x, \alpha/2) \cap (y, \alpha/2) = \emptyset$.

例 2 象 $\mathcal{O}_w = \{X, \emptyset\}$ 这样的拓扑空間 (X, \mathcal{O}) 不是 Hausdorff 空間。

11.2 (i) 設 (X, \mathcal{O}) 是 Hausdorff 空間,則关于它的拓扑子空間 Y 也是 Hausdorff 空間。

(ii) 設 $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ ($\lambda \in A$) 皆为 Hausdorff 空間,則它們的直积拓扑空間也是 Hausdorff 空間。

(iii) 設 (Y, \mathcal{O}') 是 Hausdorff 空間,而 (X, \mathcal{O}) 是由映象 $f: X \rightarrow Y$ 誘导出来的拓扑空間,則 (X, \mathcal{O}) 为 Hausdorff 空間的充要条件是: f 为 1-1 对应映象。

[問題] 試証明上面的命題。

(iv) 設 (Y, \mathcal{O}') 是由拓扑空間 (X, \mathcal{O}) 及 $f: X \rightarrow Y$ 构成的商拓扑空間,那么即使 (X, \mathcal{O}) 是 Hausdorff 空間, (Y, \mathcal{O}') 并不一定是 Hausdorff 空間。

例 設 $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}/Q, f: a \in X \rightarrow a + Q \in Y$, 則 Y 不是 Hausdorff 空間。

11.3* 让我们来定义更强的分离条件 N:

N 设 A_1, A_2 为任意两闭集, 如果 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 则存在着开集 O_1, O_2 满足 $A_1 \subset O_1, A_2 \subset O_2$, 而且 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

满足条件 N 的 Hausdorff 空间称为正规空间, 但 Hausdorff 空间未必是正规空间。

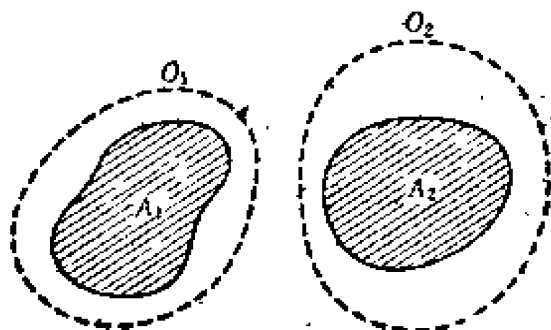


图 11.2

11.4 距离空间是正规空间。

证明 设 A_1, A_2 为任意两不相交的闭集, 对于 $x \in A_1$, 置 $\varepsilon_1(x) = \inf_{y \in A_2} \rho(x, y) > 0$. 对于 $y \in A_2$, 置 $\varepsilon_2(y) = \inf_{x \in A_1} \rho(x, y) > 0$. 又设

$$O_1 = \bigcup_{x \in A_1} V(x, \varepsilon_1(x)/2), \quad O_2 = \bigcup_{y \in A_2} V(y, \varepsilon_2(y)/2),$$

那么, 就有 $A_1 \subset O_1, A_2 \subset O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$ 成立。 证毕

对定义在正规空间上的连续函数处理起来比较容易。

11.5 Urysohn 的辅助^① 设 A_1, A_2 为正规空间 (X, \mathcal{O}) 的两个闭集, 且 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. 这时, 就存在着连续映象 $f: X \rightarrow E$, 并满足如下条件:

- (i) $f(x) = 0 \quad (x \in A_1)$;
- (ii) $f(x) = 1 \quad (x \in A_2)$;
- (iii) $0 \leq f(x) \leq 1 \quad (x \in X)$.

证明 不难看出, 条件 N 等价于下面的事实: 设 A 为闭集, O 为开集, 而 $A \subset O$, 则存在着一个 O_1 , 使得 $A \subset O_1 \subset \bar{O}_1 \subset O$. 我们可反复利用这个性质来证明上述定理。先命 $O(1) = A_2^c$ (是开集), 则 $A_1 \subset A_2^c$, 即 $A_1 \subset O(1)$, 因此存在着一个 $O(\frac{1}{2})$, 满足 $A_1 \subset$

① 参看关肇直: 拓扑空间概论, 科学出版社, 1958, 第二章 § 4. 本定理证明中增加了解释。——译者注

$O\left(\frac{1}{2}\right) \subset \bar{O}\left(\frac{1}{2}\right) \subset O(1)$, 同样存在着 $O\left(\frac{1}{2^2}\right)$ 及 $O\left(\frac{3}{2^2}\right)$ 满足 $A \subset$

$O\left(\frac{1}{2^2}\right) \subset \bar{O}\left(\frac{1}{2^2}\right) \subset O\left(\frac{1}{2}\right) \subset \bar{O}\left(\frac{1}{2}\right) \subset O\left(\frac{3}{2^2}\right) \subset \bar{O}\left(\frac{3}{2^2}\right) \subset O(1)$.

反复进行下去可得到有理数 $\alpha = \frac{r}{2^n}$ ($n=1, 2, \dots, r=1, 2, \dots, 2^n$).

每一个有理数对应着一个开集 $O(\alpha)$, 并满足: (i) $O(1) = A_2^c$, (ii) $A_1 \subset O(\alpha)$, (iii) $\alpha < \beta, \bar{O}(\alpha) \subset O(\beta)$. 现在只要假定: (a) 当 $x \in A_2$ 时 $f(x) = 1$, (b) 当 $x \in A_2^c$ 时 $f(x) = \inf \{\alpha; x \in O(\alpha)\}$, 这个函数 $f(x)$ 就满足定理的要求. 証毕

11.6 Tietze 扩张定理 设 (X, \mathcal{O}) 为正规空间, A 为 X 的子集合, 而 $\varphi_0: A \rightarrow R$ 为定义在 A 上的有界实连续函数. 那么存在着定义在 X 上的实连续函数 $f: X \rightarrow R$, 并满足: (i) $f|A = \varphi_0$, (ii) $\sup \{|f(x)|; x \in X\} = \sup \{|\varphi_0(x)|; x \in A\} (= \mu_0)$.

证明 首先, 设 $A_1 = \varphi^{-1}([\mu_0/3, \infty))$, $A_2 = \varphi^{-1}((-\infty, -\mu_0/3])$, 依照 11.5 的做法, 可得一连续实函数: $f_0: X \rightarrow R$, 而

且 $f_0(x) = \begin{cases} \mu_0/3 & (x \in A_1) \\ -\mu_0/3 & (x \in A_2) \end{cases}, |f_0(x)| \leq \mu_0/3 (x \in X)$. 特别在 A 上命

$\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - f_0(x)$, 则 $|\varphi_1(x)| \leq 2\mu_0/3 (= \mu_1)$. 继续这样做

下去, 能够得到 $f_n(x)$, $\varphi_n(x)$, 满足: (i) $f_n(x)$ 为在 X 上的连续函数,

$\varphi_n(x)$ 为在 A 上的连续函数, (ii) $\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) - f_{n-1}(x)$,

(iii) $\sup \{|\varphi_n(x)|; x \in A\} = \mu_n \leq (2/3)^n \mu_0$, $\sup \{|f_n(x)|; x \in X\} \leq \mu_n/3$.

因 $f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots$ 一致收敛, 故 $f: X \rightarrow R$ 为连续

函数而且有 $|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq \mu_0$. 另一方面, 当 $x \in A$ 时

有 $\varphi_0(x) = \sum f_n(x) = f(x)$. 証毕

下面的性质虽然常常有很大用处, 但本书以后并不用到, 所以只把结果叙述一下.

11.7* 一般拓扑空间 (X, \mathcal{O}) 的子集合 $\{O_\lambda, \lambda \in A\}$ 为局部有限, 意指: 对

于任意一个 $x \in X$, 存在一个邻域 U_x , 使得 $\{\lambda; U_x \cap O_\lambda \neq \emptyset\}$ 为有限。

11.8 设 (X, \mathcal{O}) 为正规空间, $\{O_\lambda; \lambda \in A\}$ 为 X 的局部有限的开复盖, 则可取适当的闭集合 $A_\lambda \subset O_\lambda$, 使得 $X = \bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda$. 除此以外, 存在着定义在 X 上的实连续函数 $f_\lambda(x)$ ($\lambda \in A$), 满足: (i) $0 \leq f_\lambda(x)$ ($x \in X$), (ii) $f_\lambda(x) = 0$ ($x \in X - O_\lambda$); (iii) $f_\lambda(x) > 0$ ($x \in A_\lambda$), (iv) $\sum_{\lambda \in A} f_\lambda(x) = 1$.

[问题] 设 (X, \mathcal{O}) 为正规空间, 对于开集合 O , 置

$$S(O) = \{f(x); f(x) \text{ 定义在 } X \text{ 的连续函数, } 0 \leq f(x) \leq c_O(x)\}.$$

对于两个开集合 O_1, O_2 置

$$S(O_1) + S(O_2) = \{f + g; f \in S(O_1), g \in S(O_2)\},$$

则 $S(O_1 \cup O_2) \subset S(O_1) + S(O_2)$.

11.9 虽然正规空间有其良好的特性, 但有下列的事实:

- (i) 正规空间的拓扑子空间未必是正规空间;
 - (ii) 两个正规空间的直积空间未必是正规空间。
- (这些性质的证明可参看 Kelley^[61].)

现在叙述一下关于正规空间成为距离空间的条件。虽然目前对必要与充分条件已经确立, 但下面定理所给出的充分条件较易于运用。

11.10 Urysohn 的附以距离定理 满足第二可数公理的正规空间 (X, \mathcal{O}) 一定能够定义一个距离函数, 使由 (X, ρ) 所确定的拓扑空间与原有的拓扑空间 (X, \mathcal{O}) 一致 (这就是所谓 (X, \mathcal{O}) 附以距离可能的定理)

证明 设 \mathcal{O} 的可数基底为 $\{O_n; n = 1, 2, \dots\}$. 考虑具有 $\bar{O}_n \subset O_n$ 这样集偶 $P_n = (O_n, \bar{O}_n)$ 的全体 $\{P_l; l = 1, 2, 3, \dots\}$. 对于每一个 P_l , 作一个定义在 X 上的实连续函数 $f_l(x)$:

$$f_l(x) = \begin{cases} 1 & (x \in O_n), \\ 0 & (x \in \bar{O}_n), \end{cases} \quad 0 \leq f_l(x) \leq 1,$$

若 $x \neq y$ ($x, y \in X$), 则存在具有性质 $x \in O_n, y \in \bar{O}_n$ 的集偶 P_l . 令 $u_l(x) = f_l(x)/l$ ($l = 1, 2, \dots$), 则 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l^2(x) \leq \sum_{l=1}^{\infty} 1/l^2 < +\infty$. 如设

$$\varphi(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots),$$

則 $\varphi: X \rightarrow l^{(2)}$ 为 1-1 对应的映象 ($l^{(2)}$ 在 §6 例 6 中已知为距离空间)。現在只要置 $\rho(x, y) = \rho_2(\varphi(x), \varphi(y))$, 則 ρ 就是在 X 上定义的距离函数。由 ρ 定义 \mathcal{U}_ρ , 这一 \mathcal{U}_ρ 与一开始所給的邻域系 \mathcal{U} 相一致, 因为:

(i) 对于任意 $x \in X$ 和 $V_\rho(x, \varepsilon) (\varepsilon > 0)$, 一定存在着 $U \in \mathcal{U}(x)$, 使得 $U \subset V_\rho(x, \varepsilon)$. 事实上, 取满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq K^2$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{\varepsilon^2}{5}$ 的 K, n_0 , 其次选取 $U \in \mathcal{U}(x)$, 使当 $y \in U$ 时, 满足条件 $|u_l(x) - u_l(y)| < \varepsilon / \sqrt{5n_0} K (l=1, \dots, n_0)$, 則 $U \subset V_\rho(x, \varepsilon)$. 由此可見 $\mathcal{U}(x) \supset \mathcal{U}_\rho(x)$.

(ii) 对于任意的 $U \in \mathcal{U}(x)$, 存在着 $V_\rho(x, \varepsilon) (\varepsilon > 0)$, 满足 $V_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. 事实上, 設 $x \in O_k \subset U$, 我們可以取具有 $x \in O_k \subset U$, $x \in O_j \subset \bar{O}_j \subset O_k$ 性质的集偶 $P = (O_j, O_k)$. 設 $P = P_n$, 若 $\rho(x, y) < \frac{1}{n}$, 从 $u_n(x) = 0$ 必然有 $u_n(y) < 1$. 按照 $u_l(x)$ 的定义, 就有 $y \in O_k$, 即 $V_\rho(x, 1/n) \subset U$. 这就是說 $\mathcal{U}_\rho(x) \supset \mathcal{U}(x)$. 証毕

§ 12 紧 性

12.1* 如果 Hausdorff 空間 (X, \mathcal{O}) 满足如下的条件 K , 就称为紧空間 (compact space):

K 若 X 的开集合族 $\{O_\lambda; \lambda \in A\}$ 为 X 的复盖 (即 $X = \bigcup_{\lambda \in A} O_\lambda$), 則必有有限个 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 使得 $X = \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$.

容易验证, 条件 K 与下面的条件 K' 等价:

K' 若 X 的閉集合族 $\{A_\lambda; \lambda \in A\}$ 具有有限交叉性 (即对于任意有限个 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 都有 $\bigcap_{i=1}^n A_{\lambda_i} \neq \emptyset$), 則 $\bigcap_{\lambda \in A} A_\lambda \neq \emptyset$.

12.2 紧空間 (X, \mathcal{O}) 是正規空間。

证明 設有閉集合 $A_1, A_2 (A_1 \cap A_2 = \emptyset)$, 对于 $x \in A_1, y \in A_2$, 选取具有 $U_x^{(y)} \cap U_y^{(x)} = \emptyset$ 这样性质的邻域 $U_x^{(y)} \in \mathcal{U}(x), U_y^{(x)} \in \mathcal{U}(y)$. 从 $\bigcup_{x \in A_1} U_x^{(y)} \supset A_1$, 可以选取有限个 x_1, \dots, x_m , 满足 $U_X^{(y)} = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}^{(y)} \supset A_1$ (参看 12.3). 置 $U_y = \bigcap_{i=1}^m U_y^{(x_i)} (y \in A_2)$. 又从 $\bigcup_{y \in A_2} U_y \supset A_2$, 同样可以取有限个 y_1, y_2, \dots, y_n 满足 $\bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \supset A_2$. 如果置 $O_1 = \bigcap_{i=1}^n U_X^{(y_i)}$, $O_2 = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$, 那么 $A_1 \subset O_1, A_2 \subset O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$. **证毕**

用 §9 里的方法由紧空间构成种种的拓扑空间, 试问它们是否也是紧空间?

12.3 紧空间 (X, \mathcal{O}) 的拓扑子空间 A 是紧的充要条件为: A 为闭集合。

证明 設 A 为闭集合。如果 $A = \bigcup_{\lambda \in A} O_\lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}(A)$, 而 $O_\lambda = A \cap O_\lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}$, 則 $X = (X - A) \cup \bigcup_{\lambda \in A} O_\lambda$. 由于 X 是紧空间, 故存在着有限个 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 使得 $X = (X - A) \cup \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$, 即 $A = \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$. 必要条件可从 (12.6) 导出。 **证毕**

12.4 若 (X, \mathcal{O}) 是紧空间, (Y, \mathcal{O}') 为 Hausdorff 空间, 而 $f: X \rightarrow Y$ 又是完全 1-1 对应连续映射, 那么 (Y, \mathcal{O}') 也是紧空间。特别是从紧空间 (X, \mathcal{O}) 导出的商拓扑空间如果为 Hausdorff 空间, 则必同时为紧空间。

证明 設 $Y = \bigcup_{\lambda \in A} O_\lambda' (O_\lambda' \in \mathcal{O}')$, 則 $X = \bigcup_{\lambda \in A} f^{-1}(O_\lambda')$. 由于 f 为连续, 故 $f^{-1}(O_\lambda') \in \mathcal{O}$. 又因 X 的紧性, 所以存在着有限个 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 使得 $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(O_{\lambda_i}')$, 由此可得 $Y = \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i}'$. **证毕**

12.5 Tychonoff 定理 設 $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) (\lambda \in A)$ 是紧空间, 那么它们的直积拓扑空间 $(X, \mathcal{O}) (X = \prod_{\lambda \in A} X_\lambda)$ 也是紧空间。

证明 設 $\{A_\mu; \mu \in M\}$ 为 X 的有限交叉性的闭集合族。与 §5 的例 1 证明相同, 存在着一个含 $\{A_\mu\}$ 的极大深透 \mathfrak{F} . X_λ 的子

集合族 $\mathfrak{F}_\lambda = \{pr_\lambda(F); F \in \mathfrak{F}\}$ 也是有限交叉性的。由于 X_λ 是紧的, 所以 $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} pr_\lambda F \neq \emptyset$ 。設 $x_\lambda^0 \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} pr_\lambda F$, 并假定 $x \in X$ 满足: $pr_\lambda(x^0) = x_\lambda^0$ 。現在只要能够証明 $x^0 \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$, 問題也就解决了 (因 \mathfrak{F} 为含 $\{A_\mu\}$ 的极大深透, 故按照深透的定义知 $x^0 \in \bigcap_{\mu \in M} A_\mu$, 即 $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu \neq \emptyset$)。为此, 只要能証明 x_0 的任意邻域 U (或者属于 $\mathcal{U}(x^0)$ 的基底 U), 满足 $U \cap F \neq \emptyset (F \in \mathfrak{F})$ 就成了。但是邻域 U 按照拓扑直积空间的构成只要考虑 $U = pr_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap pr_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) (U_{\lambda_i} \in \mathcal{U}_{\lambda_i}(x_{\lambda_i}^0))$ 的形式就足够了。要証明 $F \cap U = F \cap pr_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap pr_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})) \neq \emptyset$, 只要能証 $F \cap pr_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \neq \emptyset (U_{\lambda_1} \in \mathcal{U}_{\lambda_1}(x_{\lambda_1}^0))$ 就可以了。然而 $F \cap pr_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \neq \emptyset (U_{\lambda_1} \in \mathcal{U}_{\lambda_1}(x_{\lambda_1}^0))$ 可由 $pr_{\lambda_1} F \cap U_{\lambda_1} \neq \emptyset$ 导出来。这就証明了 X 的紧性。 証毕

12.6 設 (X, \mathcal{O}) 为紧空間, (Y, \mathcal{O}') 为 Hausdorff 空間, $f: X \rightarrow Y$ 为連續映象, 則 f 是閉的。特別 $f(X)$ 是 Y 的閉子集合。

証明 設 $y \in Y - f(X)$, $f(x) \in f(X)$, 然后取适合条件 $U_{f(x)} \cap U_y^{(f(x))} = \emptyset$ 的邻域 $U_{f(x)} \in \mathcal{W}(f(x))$, $U_y^{(f(x))} \in \mathcal{W}(y)$ 。因 $\bigcup_{f(x) \in f(X)} U_{f(x)} \supset f(X)$, 而且按照 12.4, $f(X)$ 是紧的, 所以可取有限个 $U_{f(x)} \cup \cdots \cup U_{f(x)} \supset f(X)$ 。若置 $U_y = \bigcap_{i=1}^n U_y^{(f(x_i))}$, 那么 $f(X) \cap U_y = \emptyset$, 即 $Y - f(X)$ 为开集合。一般来讲, 若設 A 为 X 的閉集合, 則依照 12.3, A 是紧的, 由此 $f(A)$ 为閉集合。 証毕

12.7 設 (X, \mathcal{O}) 为紧空間, (Y, \mathcal{O}') 为 Hausdorff 空間, 又設 $f: X \rightarrow Y$ 为完全 1-1 对应的連續映象, 那么 f^{-1} 也連續, 而且 (X, \mathcal{O}) 与 (Y, \mathcal{O}') 同胚。

証明 可从 12.6 直接导出来。

12.8 設 (X, \mathcal{O}) 为紧空間, $f: X \rightarrow R$ 为在 X 上定义的連續映象, 則 $f(X)$ 为有界閉集, 而且存在着 $x_0, x_1 \in X$, 使得 $f(x_0) = \sup f(X)$, $f(x_1) = \inf f(X)$ 。

証明 因 $f(X)$ 是 R 的紧集合, 按照第 3 章 § 14. 10, 它是有界的閉集合, 由此 $\sup f(X)$, $\inf f(X)$ 也属于 $f(X)$. 証毕

[問題] 紧空間 (X, \mathcal{O}) 是 Baire 空間。(証明相似于 § 15.8.)

其他紧的距离空間将在第 3 章中叙述。

到此为止, 已經接触到許多空間的名称, 現在复习一下他們之間的关系。

距离空間
紧空間 \rightarrow (正規空間) \rightarrow Hausdorff 空間 \rightarrow 拓扑空間。

§ 13 局部紧性

13.1* 在 Hausdorff 空間 (X, \mathcal{O}) , 若 X 的每一点 x 至少有一个邻域为紧集合, 則称 X 为局部紧 (locally compact) 空間。

譬如, Euclid 空間 R^n 为局部紧。茲叙述一下局部紧空間的若干性質, 但不加以証明。

13.2 局部紧空間虽然不一定是正規空間, 但如滿足第二公理, 則就是正規空間。

13.3 直积空間为局部紧的充要条件是: 諸因子空間 $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ 中, 除有限多个外都是紧的, 而这些除外的有限多个因子空間都是局部紧的。

13.4* 在 Hausdorff 空間 (X, \mathcal{O}) 中, 若对 X 的每一点 x , 至少有一个与 n 維 Euclid 空間的球体 $V^n = \{(x_1, \dots, x_n); \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$ 同胚的邻域 U_x 存在的时候, 称 (X, \mathcal{O}) 为 n 維流形体 (这样的 U_x 称为坐标邻域)。

13.5 流形体 (X, \mathcal{O}) 为局部紧空間。X 滿足第二公理的充要条件是: X 可以被可数个坐标邻域所复盖。

在正規空間中, 11.8 的性質是很重要的, 因此近来用下面的概念。

13.6* 在正規空間中, 对于 X 的任意开复盖 $\{O_\lambda; \lambda \in A\}$, 如果存在局部有限开复盖 $\{O'_\mu; \mu \in M\}$, 使得对于任意 O'_μ 都含于某一个 O_λ 中 (即 $O'_\mu \subset O_\lambda$), 这时, 称 (X, \mathcal{O}) 为仿紧 (paracompact) 空間。

13.7 距离空間、紧空間以及滿足第二可数公理的局部紧空間都是仿紧空間。

关于这些可参看 Kelley^(*) 等书。

第 3 章 距离空間

§ 14 收 斂

在 Euclid 空間, 收斂的概念与邻域同样是直观的、基本的概念, 讓我們來說明一下这个概念在距离空間的情形。

14.1* 設 (X, ρ) 为距离空間, 所謂 X 的点列 $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \{x_n\}$ 收斂于 x , 意指: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$. 記为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (\text{有时表示为 } \lim x_n = x).$$

換句話說, 就是对于任意一个 $\varepsilon > 0$, 必有一个 n_0 存在, 只要 $n \geq n_0$, 便有 $x_n \in V(x, \varepsilon)$.

14.2 在距离空間中, 有如下的性質:

(i) 若 $x_n = x (n=1, 2, \dots)$, 則 $\lim x_n = x$.

(ii) 設 $\lim x_n = x$, 則对 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n'}\}$, 都有 $\lim x_{n'} = x$.

(iii) 如果对于 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n'}\}$, 都可适当选取 $\{x_{n'}\}$ 的子列 $\{x_{n''}\}$, 滿足 $\lim_{n'' \rightarrow \infty} x_{n''} = x$, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

(iv) 設有二重点列 $\{x_{m,n}\}$, 若 $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{m,n} = y_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = z$, 則可选取 $m(n)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m(n), n} = z$.

(v) 对于点列 $\{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \Rightarrow x = y$.

这些性質的証明是很容易的, 詳細的說明从略。只要应用以上的性質, 从收斂概念就可以导出其他的概念。

14.3 在距离空間 (X, ρ) 中, 設 E 为 X 的任意子集, 則

- (i) $x \in \bar{E} \Leftrightarrow$ 存在着属于 E 的点列 $\{y_n\}$, 使得 $\lim y_n = x$.
- (ii) $x \in E^\circ \Leftrightarrow$ 存在着属于 E 的点列 $\{y_n\}$ ($y_n \neq x$) 而 $\lim y_n = x$.
- (iii) $x \in E^r \Leftrightarrow x \in \bar{E} \text{ \& } x \in \overline{X - E}$.
- (iv) $x \in E^\circ \Leftrightarrow$ 若 $\lim y_n = x$ ($y_n \in X$), 那末存在着一个 n_0 , 只要 $n \geq n_0$, 便有 $y_n \in E$.

这些证明是不难的。

下面讨论在 X 中定义着两个以上相异距离的情形。

14.4* 设在 X 中有两个距离函数 ρ, ρ' , 距离空间 (X, ρ) , (X, ρ') 定义同一拓扑空间的充要条件是: 设 $\{x_n\}$ 为 X 的任一点列, 如果关于 ρ 有 $\lim x_n = x$, 则关于 ρ' 也有 $\lim x_n = x$; 反之, 如果关于 ρ' 有 $\lim x_n = x$, 则关于 ρ 也有 $\lim x_n = x$. 换句话说, 充要条件为: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$ (及 $\delta' > 0$), 使得 $\rho(x, y) < \delta \Rightarrow \rho'(x, y) < \varepsilon$ ($\rho'(x, y) < \delta' \Rightarrow \rho(x, y) < \varepsilon$), 这时候称 ρ 与 ρ' 等价。

例 在距离空间 (X, ρ) , 若置 $\rho'(x, y) = \rho(x, y) / (1 + \rho(x, y))$, 那么 ρ 与 ρ' 等价。其他的例可参看 §16。

14.5* 如果在距离空间 (X, ρ) 中, 存在着一个处处稠密的可数集 A , 那么称 (X, ρ) 为可分。

例 设 Q 为有理数集合, 则因 $\bar{Q} = R$, 故 R 为可分空间。同样因 $\bar{Q}^* = R^*$ (Q^* 为有理点全体), 故 R^* 为可分的。

14.6 在距离空间, 可分与满足第二可数公理是等价的。

证明 若 (X, ρ) 为可分, 则可设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, $\bar{A} = X$. 如果置 $O_{i,r} = V(a_i, r)$ ($r \in Q$), 则 $\{O_{i,r}; i=1, 2, \dots, r \in Q\}$ 就是 $\mathcal{O}_\rho(X)$ 的可数基底。

反之, 若 (X, \mathcal{O}_ρ) 满足第二可数公理, 则设 $\mathcal{O}_\rho(X)$ 的可数基底为 $B(\mathcal{O}_\rho) = \{O_n; n=1, 2, \dots\}$, 如果取任意 $a_n \in O_n$ ($n=1, 2, \dots$), 那么对于 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 就有 $\bar{A} = X$. 证毕

14.7* 设 (X, ρ) 为距离空间, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在着有

有限个 x_1, \dots, x_n , 使得 $X = V(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup V(x_n, \varepsilon)$, 这时候称 (X, ρ) 为完全有界 (或称完全紧 precompact) 的距离空间。

14.8 紧距离空间为完全有界, 而完全有界的距离空间必为可分。

证明 若 X 为紧空间, 则由 $X = \bigcup_{x \in X} V(x, \varepsilon)$, 可选取有限个 $V(x_i, \varepsilon)$, 使得 $X = \bigcup_{i=1}^n V(x_i, \varepsilon)$. 这就是说, X 为完全有界。

又, 若 (X, ρ) 为完全有界, 则 X 可表示为 $X = \bigcup_{i=1}^{n_r} V(x_i^{(r)}, r)$ ($r \in Q$), 因此对于可数集合 $A = \{x_i^{(r)}; r \in Q, i = 1, \dots, n_r\}$, 就有 $\bar{A} = X$. 证毕

14.9 Fréchet 定理 距离空间 (X, ρ) 为紧的充要条件是: 对于任意 (可数) 的无限集合 $A (\subset X)$, 至少有一个聚点 (在 X 中)。

证明 设 (X, ρ) 是紧空间, 又设可数集合 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 没有一个聚点, 则所有的 $A_k = \{a_k, a_{k+1}, \dots\} (k = 1, 2, \dots)$ 都是闭集合。但 $\{A_k; k = 1, 2, \dots\}$ 是有限交叉性的, 故 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$. 这与 (X, ρ) 为紧空间的假设矛盾。反之, 设任意无限集合至少有一个聚点, 则 (X, ρ) 是完全有界的。[如果不是如此, 必存在一个 $\varepsilon > 0$, 可以取出 $\{x_k; k = 1, 2, \dots\}$, 使得 $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon (i \neq j)$. 这样 $\{x_k\}$ 就没有聚点了。] 既然 (X, ρ) 为完全有界, 从 14.8 定理知其为可分, 从而 X 满足第二可数公理 (14.6)。现在设 X 的任意开复盖 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$, 依照 7.14 可知存在着可数开子复盖使得 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\lambda_n}$. 若 $X \neq \bigcup_{n=1}^k O_{\lambda_n} (k = 1, 2, \dots)$, 我们取 $a_k \in X$, 但 $a_k \notin \bigcup_{n=1}^k O_{\lambda_n}$ (当 $j \neq k$ 时, $a_j \neq a_k$), 则 $A = \{a_k; k = 1, 2, \dots\}$ 就没有聚点了, 这与假设矛盾。 证毕

从 14.9 的結果,可直接导出下面著名的定理。

14.10 Bolzano-Weierstrass 定理

- (i) R 的有界閉区間是紧的。
- (ii) R^n 的有界閉区間也是紧的。
- (iii) R^n 的子集合 A 为紧的充要条件是: A 为有界的閉集合。

下面叙述一下关于紧空間中的一些記号。

14.11* 設 A 为距离空間 (X, ρ) 的子集合, 定义

$$\delta(A) = \sup \{ \rho(a, b); a, b \in A \}$$

为 A 的直徑。

$A, B (\subset X)$ 的距离定义为

$$d(A, B) = \inf \{ \rho(a, b); a \in A, b \in B \}.$$

依照 12.8, 若 A, B 为紧, 則存在着 $a_0, a_1 \in A$, 使得 $\delta(A) = \rho(a_0, a_1)$, 又存在着 $a_0 \in A, b_0 \in B$, 使得 $d(A, B) = \rho(a_0, b_0)$. 不言而喻, 当 A, B 为紧而且 $A \cap B = \emptyset$ 时, 則 $d(A, B) > 0$.

§ 15 距离空間的一致拓扑性质

設 ρ, ρ' 为定义在 X 上的两个距离函数, 如果 $(X, \rho), (X, \rho')$ 所定义的拓扑空間相同, 而 (X, ρ) 为完全有界, 但 (X, ρ') 未必完全有界。

例 設 $X = R, \rho(a, b) = |a - b|, \rho'(a, b) = \frac{|a - b|}{1 + |a - b|}$, 則 (X, ρ') 为完全有界而 (X, ρ) 不是全有界。

从开集合族 \mathcal{O} 的性质所引出来的性质 (如連通性, 紧性等) 对拓扑空間 (X, \mathcal{O}) 和与它同胚的拓扑空間来說是共通的, 也就是說凡是拓扑空間 (X, \mathcal{O}) 具有的性质, 与它同胚的拓扑空間也有, 反之亦如此。我們称这些性质为拓扑的性质。但是距离空間的

完全有界并非拓扑性质, 不过以后可以看到, 这是所谓一致拓扑性质。

15.1* 设有距离空间 (X, ρ) , (Y, ρ') , 所谓映象 $f: X \rightarrow Y$ 为一致连续, 意指对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在着一个 $\delta > 0$, 只要 $\rho(x, x') < \delta$, 便有 $\rho'(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

如果从 (X, ρ) 到 (Y, ρ') 的映象 $f: X \rightarrow Y$ 为一致连续, 则关于 (X, \mathcal{O}_ρ) 与 $(Y, \mathcal{O}_{\rho'})$ 来讲, 映象 f 是连续的, 但反过来未必为真。

在两个距离空间 (X, ρ) , (Y, ρ') , 若 $f: X \rightarrow Y$ 为完全 1-1 对应映象, 如果 f, f^{-1} 都一致连续, 则称 (X, ρ) 与 (Y, ρ') 为一致同胚。其次, 凡距离空间 (X, ρ) 及与它一致同胚的距离空间所共有的性质, 称为一致拓扑的性质。例如完全有界就是一致拓扑性质。

15.2 在距离空间 (X, ρ) , (Y, ρ') 中, 如果 X 为紧空间而 $f: X \rightarrow Y$ 为一连续映象, 则 f 必为一致连续。

证明 由于 f 为连续, 故对于任一个 $\varepsilon > 0$, 就存在着一个 $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, 使得 $f(V_\rho(x, \delta)) \subset V_{\rho'}(f(x), \varepsilon/2)$ 。又因 X 为紧空间, 从而可取有限个点 x_1, \dots, x_n , 使得 $X = \bigcup_{x \in X} V_\rho(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)/2)$ 。如果置 $\delta = \min \{\delta(\varepsilon, x_1)/2, \dots, \delta(\varepsilon, x_n)/2\}$, 那么只要 $\rho(x, x') < \delta$ 就有 $\rho'(f(x), f(x')) < \varepsilon$ 。 证毕

15.3* 所谓距离空间 (X, ρ) 的点列 $\{x_n\}$ 为基本点列, 意指: 对于 $\varepsilon > 0$, 存在一个 n_0 , 只要 $m, n \geq n_0$, 便有 $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, 即 $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$ 。

如果点列 $\{x_n\}$ 收敛, $\lim x_n = x$, 则 $\{x_n\}$ 为基本点列, 反过来未必为真。

15.4* 如果距离空间 (X, ρ) 中的所有基本点列都收敛, 则称距离空间 (X, ρ) 为完备 (complete) 的。

距离空间的完备性不是拓扑性质, 但是为一致拓扑性质。

15.5 距离空間 (X, ρ) 为完全有界的充要条件是: X 的任意无限子集合至少有一个基本点列 $\{x_n\}$ (但在这里要假定, 当 $i \neq j$ 时, $x_i \neq x_j$).

証明跟 14.9 一样。

从 14.9 与 15.5 可导出如下的定理。

15.6 距离空間为紧的充要条件是: (X, ρ) 为完全有界而且完备。

[問題] 局部紧空間是完备的。特別, Euclid 空間 R^n 是完备的。

15.7 完备化定理 設 (X, ρ) 为任意距离空間, 那么存在着具有下面性质的完备距离空間 (X^*, ρ^*) :

(i) 存在着 1-1 对应映象 (注意不一定为完全 1-1 对应) $\varphi: X \rightarrow X^*$, 而且 $\rho(x, x') = \rho^*(\varphi(x), \varphi(x'))$ ($x, x' \in X$).

(ii) $\overline{\varphi(X)} = X^*$.

(iii) 满足 (i), (ii) 条件的 (X^*, ρ^*) 是唯一的, 即对于另外满足条件 (i), (ii) 的完备距离空間 (X^{**}, ρ^{**}) , 可以取一个完全 1-1 对应的等距映象 $f: X^* \rightarrow X^{**}$ (即 $\bar{x}, \bar{y} \in X, \rho^*(\bar{x}, \bar{y}) = \rho^{**}(f(\bar{x}), f(\bar{y}))$).

这时称 (X^*, ρ^*) 为 (X, ρ) 的完备化空間。

証明 仿效 Cantor 把有理数集 Q 构成实数集的方法, 茲根据这个原則叙述如下: 在 (X, ρ) 中取所有基本点列 $\xi = \{x_n\}$ 的全体为 \mathfrak{X} , 对于 $\xi = \{x_n\}$, $\eta = \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ 則命 $\xi \sim \eta$, 此处 \sim 表 \mathfrak{X} 中的等价关系。 \mathfrak{X} 的商集合記为 $X^* = \mathfrak{X} / \sim$. 凡是对应于 $\xi (\in \mathfrak{X})$ 的元素都用 $\bar{\xi} (\in X^*)$ 来表示。其次置 $\rho^*(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$, 可証 (X^*, ρ^*) 为完备距离空間。再者, 对于 $x \in X$, 設 $\xi = \{x_n\}$ ($x_1 = x_2 = \dots = x$), 并置 $\varphi(x) = \bar{\xi}$, 則 $\rho(x, x') = \rho^*(\varphi(x), \varphi(x'))$, 易証 $\overline{\varphi(X)} = X^*$. 至于唯一性之証明留給讀者。 証毕

15.8 Baire 定理 完备距离空間 (X, ρ) 是 Baire 空間。

証明 設 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $(\bar{E}_n)^{\circ} = \emptyset$ ($n=1, 2, \dots$) 为 X 的第1类集合, 現在要証 $X - E$ 为处处稠密。为此只要証, 对于任意 $x \in X$, $V(x, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) 必含有 $X - E$ 中的点。因为 $V(x, \varepsilon')$ ($0 < \varepsilon' < \varepsilon$) 必含 $\{E_n\}$ 中某一个集的点, 如果不含所有 E_n 的点, 則 $V(x, \varepsilon')$ 必含有 $X - E$ 的点, 定理就被証明了。这里不妨設 $V(x, \varepsilon')$ 含有 E_1 的点。設 $x_1 \in V(x, \varepsilon') - \bar{E}_1$, 由于 \bar{E}_1 是疏集合, 故存在着 $\varepsilon_1 > 0$, 滿足 $\overline{V(x_1, \varepsilon_1)} \subset V(x, \varepsilon') - \bar{E}_1$ (在这里不妨取 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'/2$ 的 ε_1 , 这是可以的, 因为已知有 ε_1 存在, 故比它更小的当然也成立)。同样, $\overline{V(x_2, \varepsilon_2)} \subset V(x_1, \varepsilon) - \bar{E}_2$ ($0 < \varepsilon_2 < \varepsilon'/4$), \dots , $\overline{V(x_n, \varepsilon_n)} \subset V(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) - \bar{E}_n$ ($0 < \varepsilon_n < \varepsilon'/2^n$), \dots 。这时不难看出 $\rho(x_n, x_{n-1}) < \varepsilon'/2^n$ ($n=1, 2, \dots$), 由此可見 $\{x_n\}$ 是一基本列。由于 X 是完备的, 所以 $\lim x_n = y$ 存在。因为 $y \in \overline{V(x_n, \varepsilon_n)}$ ($n=1, 2, \dots$), 且从所作 $V(x_n, \varepsilon_n)$ 的性质(即 $V(x_n, \varepsilon_n)$ 不含 $\bigcup_{n=1}^n E_n$ 的点)知 $y \in X - E$ 。其次 $y \in \overline{V(x, \varepsilon')} \subset V(x, \varepsilon)$ 。 証毕

§ 16 距离空間的构成

讓我們来叙述一下从已知距离空間导出新的距离空間的方法。

16.1 在 n 維 Euclid 空間 R^n 可以定义若干互不相同的距离函数, 那就是: 对于 $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $y = \{y_1, \dots, y_n\}$, 置

$$(i) \quad \rho^{(\infty)}(x, y) = \|x - y\|_{\infty}, \quad \|x\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

$$(ii) \quad \rho^{(1)}(x, y) = \|x - y\|_1, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$(iii) \quad \rho^{(2)}(x, y) = \|x - y\|_2, \quad \|x\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right\}^{1/2}.$$

(iv) 設 $1 \leq p < \infty$, 置

$$\rho^{(p)}(x, y) = \|x - y\|_p, \quad \|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p}.$$

可把(ii), (iii)看作是(iv)的特殊情形。

$\rho^{(p)}$ 是一距离函数, 这可用下面的 Minkowski 不等式导出来。为此先证 Hölder 与 Minkowski 不等式。

在大家熟知的公式

$$|\alpha| |\beta| \leq (|\alpha|^p/p) + (|\beta|^q/q) \textcircled{1}$$

$$\left(\text{这里 } p > 1, q > 1, \text{ 而 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \alpha, \beta \in R \right)$$

中, 置 $\alpha = \frac{|x_i|}{A}, \beta = \frac{|y_i|}{B}, A = \|x\|_p, B = \|y\|_q$ 则得

$$|x_i| |y_i| \leq \frac{|x_i|^p A}{p A^{p-1}} + \frac{|y_i|^q B}{q B^{q-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

然后两边从 1 到 n 相加即得 $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right\}^{1/q}$, 由此立即得出:

Hölder 不等式

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right\}^{1/q} \quad \left(p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

其次, 先设 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, x_i \geq 0, y_i \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq [\{\sum |x_i|^p\}^{1/p} + \{\sum |y_i|^p\}^{1/p}] \{\sum (x_i + y_i)^{(p-1)q}\}^{1/q} \\ &= [\{\sum |x_i|^p\}^{1/p} + \{\sum |y_i|^p\}^{1/p}] \{\sum (x_i + y_i)^p\}^{1/q}, \end{aligned}$$

① $\therefore y^{m-1} < 1 (y > 1, 0 < m < 1) \Rightarrow \int_1^y t^{m-1} dt < \int_1^y 1 dt \Rightarrow \frac{y^m - 1}{m} < (y - 1)$
 $\Rightarrow y^m - 1 < m(y - 1) (y > 1, 0 < m < 1)$. 设 $y = a/b (a > 0, b > 0) \Rightarrow a^{1/p} b^{1/q} \leq a/p + b/q$,
 再设 $a = |\alpha|^p, b = |\beta|^q$ 即得 $|\alpha| |\beta| \leq |\alpha|^p/p + |\beta|^q/q$. — 译者注

用 $\{\sum |x_i + y_i|^p\}^{1/p}$ 除之, 即得

Minkowski 不等式

$$\left\{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right\}^{1/p} \leq \left\{\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right\}^{1/p} \quad (1 < p < \infty).$$

Minkowski 不等式对于 $p=1, p=\infty$ 也满足。

上面所定义的许多距离函数是等价的, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, 这可从

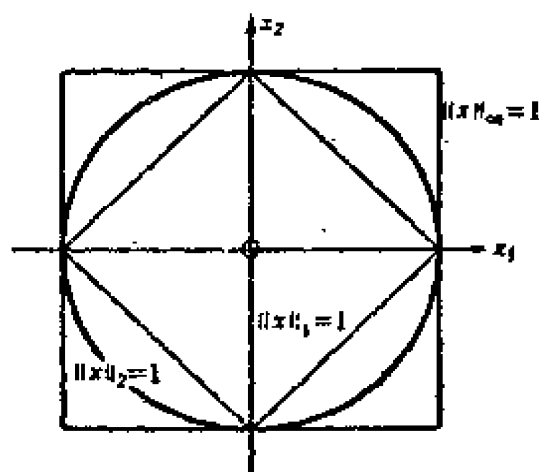


图 16.1

$$\rho^{(q)}(x, y) \geq \rho^{(p)}(x, y)$$

$$\text{及 } \rho^{(\infty)}(x, y) \leq n \rho^{(1)}(x, y)$$

导出来。

[问题 1] 试证 $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

[问题 2] 设 $(X_1, \rho_1), \dots, (X_n, \rho_n)$

为距离空间, 置 $X = X_1 \times \dots \times X_n$ 及

$$\rho^{(p)}(x, y) = \left\{\sum_{i=1}^n \rho_i(x_i, y_i)^p\right\}^{1/p}$$

$$(1 \leq p < \infty),$$

则 $(X, \rho^{(p)})$ 是距离空间。问 p 为何值时, 它们互相等价? 此外设 $(X_1, \rho_1), \dots, (X_n, \rho_n)$ 为完备空间, 则 $(X, \rho^{(p)})$ 也是完备空间。

16.2 距离空间 (X_n, ρ_n) ($n=1, 2, \dots$) 的直积空间 $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$

也是距离空间。譬如, 对于 $x = (x_n), y = (y_n)$, 只要置

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}$$

就成了。

[问题] (X_n, ρ_n) ($n=1, 2, \dots$) 都是完备空间, 那么 (X, ρ) 也是完备空间。

特别当 $X_n = \mathbb{R}$ ($n=1, 2, \dots$) 时, 置 $X = \prod_{n=1}^\infty \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots); x_n \in \mathbb{R}\}$ 就是一例。兹再举几个关于这样的距离空间的例子。

16.3 设 $l^{(p)} = \{x; x \in X, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\}$ ($1 \leq p < \infty$),

若置

$$\rho^{(p)}(x, y) = \|x - y\|_p, \quad \|x\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{1/p},$$

那么 $(l^{(p)}, \rho^{(p)})$ 是完备距离空间。

证明 $(l^{(p)}, \rho^{(p)})$ 为距离空间之证明可由 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式导出来, 这里所谓

Hölder 不等式就是对于 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1, q > 1, x \in l^{(p)},$

$y \in l^{(q)}$ 有

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

所谓 Minkowski 不等式就是对于 $p \geq 1, x, y \in l^{(p)}$ 有

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

这两个不等式可完全仿照与 R^n 空间的情形来证明。现在来证明 $l^{(p)}$ 的完备性。设 $x^{(n)} \in l^{(p)}, \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p = 0$ 。(i) 对于任意 k 有

$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k$ 存在。(ii) 置 $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$,

那么有 $x \in l^{(p)}$ 。事实上, 由于 $\{x^{(n)}\}$ 是 $l^{(p)}$ 的基本列, 故存在一个 $K > 0$, 使得 $\|x^{(n)}\|_p \leq K (n = 1, 2, \dots)$ 。由此可见, 对于任意 k 都

有: $\sum_{i=1}^k |x_i|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i^{(n)}|^p \leq \overline{\lim} \|x^{(n)}\|^p \leq K^p$ 。这就是说 $\|x\|_p < K$,

$\therefore x \in l^{(p)}$ 。(iii) 同样, 对于 $\varepsilon > 0$, 存在着 n_0 , 只要 $m, n > n_0$, 便有 $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p \leq \varepsilon$, 若 $n \rightarrow \infty$, 就导出 $\|x - x^{(n)}\|_p \leq \varepsilon$, 那就是说 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\|_p = 0$ 。证毕

16.4 $l^{(\infty)} = \{x; x \in X, \sup\{|x_n|; n = 1, 2, \dots\} < +\infty\}$,

若置 $\rho^{(\infty)}(x, y) = \|x - y\|_{\infty}, \|x\|_{\infty} = \sup\{|x_n|; n = 1, 2, \dots\}$,

那么 $(l_{\infty}, \rho_{\infty})$ 也是完备距离空间(这一点留给读者证明)。

下面讨论映象(函数)空间。

16.5 设 (X, \mathcal{O}) 是拓扑空间, (Y, ρ) 是一距离空间, 置

$C(X, Y) = \{f; f: X \rightarrow Y \text{ 为连续而有界的映象 (即 } \delta(f(X)) < \infty\}$.

对于 $f, g \in C(X, Y)$, 则置

$$\rho_C(f, g) = \sup \{\rho(f(x), g(x)); x \in X\},$$

那么 $(C(X, Y), \rho_C)$ 也是距离空间。

例 当 Y 为 R 的时候, $C(X, Y) = C(X, R)$ 是定义在 X 上的有界实连续函数的全体, 若 $\lim \rho_C(f_n, f) = 0$, 则 f_n 一致收敛于 f .

应用实变函数论中的著名定理 (一致收敛的连续函数列的极限亦是连续函数) 可引出下列定理:

16.6 设 (Y, ρ) 为完备距离空间, 则 $(C(X, Y), \rho_C)$ 也是完备距离空间。

下面定理应用很广:

16.7. Ascoli-Arzelà 定理 设 (X, ρ) 为紧的距离空间, 设 $\mathfrak{F} = \{f_\lambda; \lambda \in A\} \subset C(X, R)$, 则 \mathfrak{F} 为完全有界 (完全紧) (即对于 \mathfrak{F} 的任意无限子序列, 可取出关于 ρ_0 的收敛子序列来) 的充分与必要条件是: \mathfrak{F} 为一致有界而且同程度一致连续。

这里所谓一致有界, 意思就是说: 存在着一个 $N > 0$, 使得 $\rho_C(f, 0) < N (f \in \mathfrak{F})$. 这里所谓同程度一致连续, 意思就是说: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 可选取 $\delta > 0$ (与 $f \in \mathfrak{F}$ 无关), 只要 $\rho(x, y) < \delta$, 便有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon (f \in \mathfrak{F})$.

证明 (必要性) 设 \mathfrak{F} 为完全有界 (完全紧), 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 可取 $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_k}$ 使得 $\mathfrak{F} \subset V(f_{\lambda_1}, \varepsilon) \cup \dots \cup V(f_{\lambda_k}, \varepsilon)$. 由此可见, 任意 $f \in \mathfrak{F}$ 必定含于某一个 $V(f_{\lambda_i}, \varepsilon)$, 即 $f \in V(f_{\lambda_i}, \varepsilon)$. 所以 $\rho_C(f, 0) \leq \rho_C(f_{\lambda_i}, 0) + \rho_C(f_{\lambda_i}, f) \leq M + \varepsilon$, 此处 $M = \sup \{\rho_C(f_{\lambda_i}, 0)\}; i = 1, 2, \dots\}$. 这就证明了 \mathfrak{F} 为一致有界。由于 $f_{\lambda_i}(\varphi)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 是连续函数, 故 $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_k}$ 在 X 上是一致连续的, 由此可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 可选取 $\delta > 0$, 使得当 $\rho(x, x') < \delta$

时, $|f_{\lambda_i}(x) - f_{\lambda_i}(x')| < \varepsilon (i=1, 2, \dots, k)$. 现在对任意一个 $f_\lambda \in \mathfrak{F}$, 不妨设 $f_\lambda \in V(f_{\lambda_i}, \varepsilon)$, 则 $|f_\lambda(x) - f_\lambda(x')| \leq |f_\lambda(x) - f_{\lambda_i}(x)| + |f_{\lambda_i}(x) - f_{\lambda_i}(x')| + |f_{\lambda_i}(x') - f_\lambda(x')| < 3\varepsilon$. 这就是说 \mathfrak{F} 是同程度一致连续的。

(充分性)从 \mathfrak{F} 的一致有界可知存在着一个 $N > 0$, 使得 $\rho_C(f_\lambda, 0) \leq N (f_\lambda \in \mathfrak{F})$. 因此对于任意一个 $x \in X$, 可知 $\{f_\lambda(x); f_\lambda \in \mathfrak{F}\}$ 为有界, 而对于任意一个 $x \in X$, 都可取收敛子列 $\{f_{\lambda_n}(x)\}$. 其次因为 X 是紧的, 故知 X 为可分, 即存在着一个 $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, 使得 $\bar{A} = X$. 由上可知 $\{f(x_k), f \in \mathfrak{F}\}$ 都有界, 首先考虑 x_1 , 即 $\{f(x_1), f \in \mathfrak{F}\}$ 为有界, 即可取收敛子列, 记为 $\{f_{\lambda_n}^{(1)}(x_1)\}$. 其次因 $\{f_{\lambda_n}^{(1)}(x_1)\}$ 也为有界, 故又可以取一收敛子列, 记之为 $\{f_{\lambda_n}^{(2)}(x_2)\}$, \dots 依此继续下去, 即有

$$\begin{aligned} & f_{\lambda_1}^{(1)}(x_1), f_{\lambda_2}^{(1)}(x_1), \dots, f_{\lambda_n}^{(1)}(x_1) \dots \\ & f_{\lambda_1}^{(2)}(x_2), f_{\lambda_2}^{(2)}(x_2), \dots, f_{\lambda_n}^{(2)}(x_2) \dots \\ & \dots\dots\dots \\ & f_{\lambda_1}^{(n)}(x_n), f_{\lambda_2}^{(n)}(x_n), \dots, f_{\lambda_n}^{(n)}(x_n) \dots \end{aligned}$$

我們利用对角线方法, 取函数列 $f_{\lambda_1}^{(1)}(x), f_{\lambda_1}^{(2)}(x), \dots, f_{\lambda_n}^{(n)}(x), \dots$ 即 $\{f_{\lambda_n}^{(n)}(x)\} (\in \mathfrak{F})$. 由上面的作法, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\lambda_n}^{(n)}(x_k) = a_k (k=1, 2, \dots)$

存在。现在证 $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \rho_C(f_{\lambda_m}^{(m)}, f_{\lambda_n}^{(n)}) = 0$. 另一方面, 因 \mathfrak{F} 是同程度一

致连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在着一个 $\delta > 0$, 只要 $\rho(x, x') < \delta$, 便有 $|f_\lambda(x) - f_\lambda(x')| < \varepsilon, (f_\lambda \in \mathfrak{F})$. 其次 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} V(x_i, \delta)$;

按照假设 X 为紧的, 故有 $X = V(x_1, \delta) \cup \dots \cup V(x_k, \delta)$ (这里 k 为有限的某一个数). 此外, 对于 x_1, \dots, x_k , 一定存在着一个 n_0 , 只要 $m, n \geq n_0$, 便有 $|f_{\lambda_m}^{(m)}(x_i) - f_{\lambda_n}^{(n)}(x_i)| < \varepsilon (i=1, 2, \dots, k)$. 这时, 对于任意的 $x \in X$, 假定 $x \in V(x_j, \delta) (1 \leq j \leq k)$, 则当 $m, n \geq n_0$ 时, 便有

$$|f_{\lambda_m}^{(m)}(x) - f_{\lambda_n}^{(n)}(x)| \leq |f_{\lambda_m}^{(m)}(x) - f_{\lambda_m}^{(m)}(x_j)| + |f_{\lambda_m}^{(m)}(x_j) - f_{\lambda_n}^{(n)}(x_j)| \\ + |f_{\lambda_n}^{(n)}(x_j) - f_{\lambda_n}^{(n)}(x)| < 3\varepsilon, \text{ 即 } \rho_C(f_{\lambda_m}^{(m)}, f_{\lambda_n}^{(n)}) \leq 3\varepsilon.$$

由此 $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \rho_C(f_{\lambda_m}, f_{\lambda_n}) = 0$, 也就是在 \mathfrak{F} 中可以取出一个基本列 $\{f_{\lambda_n}^{(n)}(x)\}$. 故 X 为完全有界(完全紧). 証毕

一般来讲, 所谓在拓扑空间 (X, \mathcal{O}) 定义的实连续函数集 $\mathfrak{F} = \{f_\lambda(x); \lambda \in A\}$, 在点 x 同程度连续, 意指对于任意 $\varepsilon > 0$, 可以取得 x 的一个邻域 U , 使得对于所有 $y \in U$, 以及所有 $f_\lambda \in \mathfrak{F}$ 都有 $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| < \varepsilon$. 此外, \mathfrak{F} 在 X 的每一点都同程度连续时, 则称 \mathfrak{F} 在 X 同程度连续. 与 15.2 一样, 设 (X, ρ) 为紧空间, 则 \mathfrak{F} 在 X 同程度连续与 \mathfrak{F} 在 X 同程度一致连续是等价的.

§ 17 Banach 空间, Hilbert 空间

在 § 16 中列举的几个距离空间的例子, 其中的大多数不仅是距离空间, 而且还是所谓如下的 Banach 空间.

17.1* 若集合 X 满足下述条件, 称 X 为 Banach 空间.

(i) 在 X 中定义着加法 $x+y$ 及数积 λx (λ 为实数), X 是一向量空间.

(ii) 对于所有的 x , 有一个范数(norm) $\|x\| \in R$ 与之对应, 这范数满足:

(a) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (向量空间的 0 元).

(b) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($x, y \in X$).

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ($x \in X, \lambda \in R$).

从而置 $\rho(x, y) = \|x-y\|$, 则 (x, ρ) 为距离空间.

(iii) (X, ρ) 是完备距离空间.

兹举 Banach 空间的例如下:

例 1 如果 Euclid 空间的范数象 16.1 节那样定义 $\|x\|_p$ ($1 \leq p < \infty$), 及 $\|x\|_\infty$, 则 R^n 是以这些为范数的 Banach 空间.

例 2 16.3 的 $l^{(p)}$ ($1 \leq p < \infty$) 是以 $\|x\|_p$ 为范数的 Banach 空间. 此外 16.4 的 $l^{(\infty)}$ 关于范数 $\|x\|_\infty$ 亦成为 Banach 空间.

証明 首先必須証明 $l^{(p)}$ (及 $l^{(\infty)}$) 是一向量空間。从 Minkowski 不等式易知, 若 $x, y \in l^{(p)}$, 則 $x+y \in l^{(p)}$ ($\in l^{(\infty)}$)。其次若 $x \in l^{(p)}$ ($\in l^{(\infty)}$), 那么 $\lambda x \in l^{(p)}$ ($\in l^{(\infty)}$) 是很显然的了。至于 (ii), (iii) 的証明已在 16.3 讲过。 証毕

例 3 設 (X, \mathbb{C}) 为拓扑空間, $C(X)$ 表示定义在 X 上的有界連續函数的全体。对于 $f \in C(X)$, 置

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|; x \in X\},$$

則 $C(X)$ 是以 $\|f\|$ 为范数的 Banach 空間。

茲举不是 Banach 空間, 但有近似于 Banach 空間性质的例如下:

例 1 $l = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_n \in R\} = R^1$, 置

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1+|x_n|},$$

則 l 的范数除不滿足 Banach 空間的性质 (ii) 即 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ 外, 对其他各点全部都滿足。

例 2 在 $X = [0, 1]$ 中定义的連續函数的全体, 記为 $C(X)$, 置

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^1 |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

則 $C(X)$ 滿足 Banach 空間的性质 (i), (ii), 但不滿足 (iii)。

Banach 空間的实例很多, 而且大多容易处理, 因此它的性质易于理解, 并已在广泛应用。上面的例 1 虽然不是 Banach 空間, 但很近似, 因之 Banach 空間的理論中有許多都成立。例 2 缺少完备性, 依照 15.7 可使它完备化而成为一个 Banach 空間。但不能仅由于抽象的扩大而构成 Banach 空間, 既要考虑不連續函数代替連續函数, 也要考虑积分定义扩張的問題, 这实际上就是求包含有定义在 X 上的函数集合 C 的 Banach 空間的問題。要解决这个問題, 就需要 Lebesgue 积分理論(參看第 5 章)。

在 Banach 空間中, 有所謂 Hilbert 空間, 那是 Euclid 空間的很重要的扩充(有时称为无限維的 Euclid 空間)。

17 2* 集合 X , 如果滿足如下的条件 (i) ~ (iii), 則称为 Hilbert 空間(或称广义的 Euclid 空間):

(i) X 为向量空間($\lambda \in R$),

(ii) 对于 $x, y \in X$, 定义着一个內积 $(x, y) \in R$, 并滿足:

(a) $(x, y) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (向量空間的 0 元),

$$(b) \quad (x, y) = (y, x).$$

$$(c) \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y).$$

$$(d) \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y).$$

若置 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, 那就有范数的性质 (17.1*, (ii)), 由此 $\rho(x, y) = \|x - y\|$ 为距离函数。

(iii) X 关于距离 ρ 是完备的。

現在我們來証明 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ 是一范数。事实上,

$$0 \leq (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y),$$

右边是 λ 的 2 次式。因此有判別式 $(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$, 即得所謂 Schwarz 不等式:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

由此可得

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2,$$

即

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

通常称 Hilbert 空間为无限維的向量空間。

例 設 $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ 为 $l^{(2)}$ 中的任意二元素, 作关于 Hilbert 空間的内积

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

事实上, 上式的右边是收斂的, 这可由

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty, \quad \left| \sum_{n=m}^r x_n y_n \right| \leq \left(\sum_{n=m}^r x_n^2 \right) \left(\sum_{n=m}^r y_n^2 \right) \rightarrow 0 \quad (m, r \rightarrow \infty)$$

看出来。

关于 Hilbert 空間及 Banach 空間的理論可參看本講座吉田耕作著: 位相解析 (中譯本为“泛函分析”)。此外, 由于最近广义函数理論的发展, 所以除 Banach 空間外, 拓扑綫性空間的理論也成为重要的了, 这可參看本講座岩村联著: 超函数 (中譯本为“广义函数”)。

第 4 章 測 度

§ 18 結 論

設 C 为定义在区間 $[0, 1] = X$ 上的实連續函数的全体, 当 $f, g \in C$ 时, 置

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2}.$$

那末空間 C 具有如 17.2* 中所述的 Hilbert 空間的大部分性質, 但不具 (iii) 的完备性。利用 15.7 的方法, 若將 C 关于 $\rho_2(f, g) = \|f - g\|$ 进行完备化, 則所得空間中的点并不能用定义在 $[0, 1]$ 上的函数来表示。將积分概念扩张后, 設关于 Lebesgue 2 次(平方)可积的全体記为

$$L^{(2)} = \left\{ f(t); \int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty \right\},$$

則 $L^{(2)}$ 显然构成 Hilbert 空間(參看 § 26)。虽然这是 Lebesgue 积分重要性的一例, 但此时必要的是, 对于函数 $f(t)$ 就有一个实数 $L(f)$:

$$L(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

与之对应, 而且 $L(f)$ 具有若干很重要的性質。至于 $L(f)$ 是否能由通常的积分处理方法而得到, 这一点并不是特別必要的。例如 $f(t)$ 并不是連續函数, 但可以用連續函数列 $f_n(t)$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ 表达出来。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = a$ 存在, 就可令 $L(f) = a$ 之类的方法来确定 $L(f)$ 。事实上, 这样的方法可以設計出很多种。

然而, 我們不仅仅限于积分概念的扩充, 而面积和体积即所謂

測度的概念有时也要扩充。例如,近代概率論中的所謂概率,就不外乎是(抽象的)測度。它不单纯限于平面及空間的集合的測度,也涉及到无限維空間和函数空間的測度。为了这个目的,就有必要回到一般集合論的立場上来建立測度理論。以下,在普遍考察

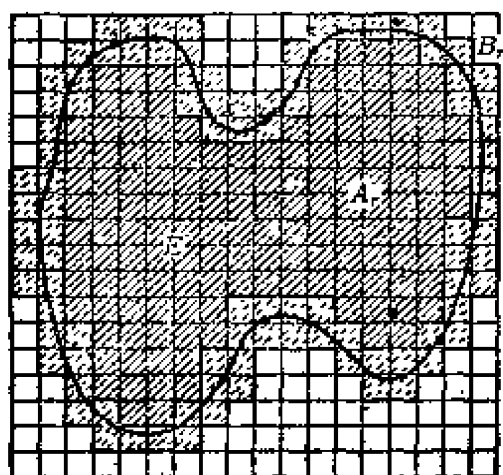


图 18.1

測度之前,先回忆一下到現在为止在微积分学中所用过的測度(measure)。

首先温习一下关于 Jordan 測度。在平面上作正交軸,象图 18.1 那样,把它分割成边长为 r 的小正方形。設 E 为平面上的有界集,命 A_r 表示完全含在 E 中的小正方形的全体的总面积,以 B_r 表示凡与 E

有公共点的小正方形的全体的总面积。若当精細分割至 $r \rightarrow 0$ 时,置

$$\underline{v}(E) = \lim_{r \rightarrow 0} A_r, \quad \bar{v}(E) = \lim_{r \rightarrow 0} B_r,$$

則称 $\underline{v}(E)$ 为 E 的 Jordan 内测度, $\bar{v}(E)$ 为 E 的 Jordan 外測度。一般来讲, $\underline{v}(E) \leq \bar{v}(E)$ 。如果 $\underline{v}(E) = \bar{v}(E)$, 則称 E 为 Jordan 可測集合, 用 $v(E)$ 表示它的值, 这时称 $v(E)$ 为 E 的 Jordan 測度。[$\underline{v}(E)$ 与 $\bar{v}(E)$ 的值不依赖于平面上正交軸的作法。] 以上所讲虽然仅仅是平面上的集合, 但对直綫上与空間上的 Jordan 測度的討論也是相同的。

18.1 設 \mathfrak{R} 为(平面上)有界 Jordan 可測集合的全体,

- I 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{R}$, 則 $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{R}$;
- II 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{R}$, 則 $E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{R}$;
- III 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{R}$, 又 $E_1 \subset E_2$, 則 $E_2 - E_1 \in \mathfrak{R}$;
- IV 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{R}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 則

$$v(E_1 \cup E_2) = v(E_1) + v(E_2).$$

(这里的証明从略。应用 $\bar{v}(E) = \underline{v}(E) \Leftrightarrow \bar{v}(E^c) = 0$ 来証明上列各点是很容易的。)

另一方面, 还有許多 Jordan 不可測的集合, 比方, 在直綫 R 上, 以 Q_1 表示 $[0, 1]$ 所含的有理数集合, 則 $\bar{v}(Q_1) = 1$, $\underline{v}(Q_1) = 0$. 由此可見:

V 若 $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{R}$, 則 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{R}$ 未必一定成立。

我們先討論一維空間的情形。由于 Jordan 測度对于上面的性質“V”不一定成立, 因此来考虑它的改进方法。首先, 設定义有界集測度的原則为

(i) $m([0, 1]) = 1$, $m(\emptyset) = 0$;

(ii) 若 E_1 与 E_2 可合同时, 則 $m(E_1) = m(E_2)$;

(iii) 若 $E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$, 則 $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$.

虽然对于直綫上的所有有界集合 E 不一定有 $m(E)$ 的值, 但能够确定下面所考察的集合 E 的測度 $m(E)$ 的值。若 I 表示长为有理数 r 的区間, 則从 (i), (ii), (iii) 可得 $mI = r$. 同样, 若 I 是长为无理数 α 的区間, 則也有 $mI = \alpha$. 因为 (有界) 开集合 O 可表示为 $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i (I_i \cap I_j = \emptyset, i \neq j)$ (即 O 可表成充其量为可数个区間 I_i 的和集), 因此从 (iii) 可知 $m(O) = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$. 設 A 为包含在 $[0, 1]$ 上的閉集合, 則有 $A = [0, 1] - O$ (O 为开集合), 于是定义: $m(A) = 1 - m(O)$. 若 $A \subset E \subset O$ 而 A 为閉集合, O 为开集合, 則必有 $m(A) \leq m(E) \leq m(O)$. 現在对于任意 E 置 $\bar{m}(E) = \inf \{m(O); E \subset O: \text{开集合}\}$, $\underline{m}(E) = \sup \{m(A); E \supset A: \text{閉集合}\}$. 我們分別称 $\bar{m}(E)$, $\underline{m}(E)$ 为 Lebesgue 的外測度与 Lebesgue 的內測度。一般情形下有: $\bar{m}(E) \geq m(E) \geq \underline{m}(E)$, 特別是, 如果

$$\overline{m}(E) = \underline{m}(E)$$

这时称 E 为 Lebesgue 可測集 (measurable set), 并称 $m(E)$ 为 E 的 Lebesgue 測度。如果我們仅考虑有界的 Lebesgue 可測集的全体, 則下面的定理成立 (証明見 §21)。

18.2 設直綫上有界的 Lebesgue 可測集的全体为 \mathfrak{B} ,

- I 若 $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{B}$, 而且 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 为有界, 則 $E \in \mathfrak{B}$;
- II 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{B}$, 則 $E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{B}$;
- III 若 $E_1, E_2 \in \mathfrak{B}$, $E_1 \subset E_2$, 則 $E_2 - E_1 \in \mathfrak{B}$;
- IV 在 (I) 的条件下, 如果 $E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$, 則

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

拿这些性質和 Jordan 測度作一比較, 可知性質 (I) 及 (IV) 已改进了。一般来講, 凡是 Jordan 可測的必然 Lebesgue 可測, 反之未必为真。至于上面的改进对于积分有何影响, 那将在第 5 章中叙述。以上我們研究了直綫上与平面上集合的測度, 現在更系統地、更一般地来討論集合 X 的子集合的測度, 然后在 §21 中应用这些結果来討論具体問題。

§19 Borel 集合体, Lebesgue 式測度

現在回到一般的集合来討論 (在这一节中并不假定 X 一定为拓扑空間)。

19.1* 設有集合 X , 如 $\mathfrak{R} \in \mathfrak{P}(X)$ 滿足下列条件, 就称 \mathfrak{R} 为集合体:

- (i) $X, \emptyset \in \mathfrak{R}$;
- (ii) 若 $A, B \in \mathfrak{R}$, 則 $A \cup B \in \mathfrak{R}$;
- (iii) 若 $A, B \in \mathfrak{R}$, 則 $A \cap B \in \mathfrak{R}$;

(iv) 若 $A \in \mathfrak{R}$, 则 $A^c (= X - A) \in \mathfrak{R}$.

(这些条件比 18.1 的 \mathfrak{R} 性质稍为强一些。)

\mathfrak{R} 为集合体的充要条件是: (i') $\mathfrak{R} \neq \emptyset$, (ii') = (ii), (iii') = (iv).

19.2* 一般, 设 $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{P}(X)$, 定义:

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

即 $x \in \overline{\lim} A_n \Leftrightarrow$ 存在着无限个如下的 $n_1 < n_2 < \dots < \dots$, 使得 $x \in A_{n_i} (i=1, 2, \dots)$;

$x \in \underline{\lim} A_n \Leftrightarrow$ 存在着一个 $n_0 = n_0(x)$, 只要 $n = n_0, n_0+1, n_0+2, \dots$, 便有 $x \in A_n$. 容易看出

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n, \quad \overline{\lim} A_n = (\underline{\lim} A_n^c)^c, \quad \underline{\lim} A_n = (\overline{\lim} A_n^c)^c.$$

特别是当 $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$ 时, 记之为

$$\lim A_n.$$

若 $\lim A_n$ 存在, 则 $\lim A_n = (\lim A_n^c)^c$. 特别是, 若 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, 则有 $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 若 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, 则 $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

[问题 1] 设 $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{R}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 那么 A 可用互不相交的 $B_1, B_2, \dots \in \mathfrak{R}$ 来表示, 即 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ (这里 $B_i \cap B_j = \emptyset$).

[问题 2] 对于集合 $A (\subset X)$, 如果定义了它的特征函数 $c_A(x) = 1, (x \in A); c_A(x) = 0 (x \in A^c)$, 那么, 下面等式成立:

$$c_{\overline{\lim} A_n}(x) = \overline{\lim} c_{A_n}(x), \quad c_{\underline{\lim} A_n}(x) = \underline{\lim} c_{A_n}(x).$$

下面是比集合体更强的性质:

19.3* 所谓 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ 为 Borel 集合体, 是指: (i) \mathfrak{B} 为集合体, (ii) 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 及 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 也属于 \mathfrak{B} (比 18.2 的 \mathfrak{R} 的条件来得少)。

不言而喻, 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}$, 则 $\overline{\lim} A_n, \underline{\lim} A_n$ 也属于 \mathfrak{B} .

[問題1] 試証 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ 为 Borel 集合体的必要与充分条件是: (i') $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, (ii') $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}$, 則 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$, (iii') $A \in \mathfrak{B}$, 則 $A^c \in \mathfrak{B}$.

[問題2] $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ 为 Borel 集合体的充要条件是: (i'') $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, (ii'') $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}$, 則 $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{B}$, (iii'') 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}$, $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, 則 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$, (iv'') 若 $A \in \mathfrak{B}$, 則 $A^c \in \mathfrak{B}$.

19.4 对于任意一个集合族 $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X) (\mathfrak{F} \neq \emptyset)$, 存在着含 \mathfrak{F} 的最小集合体 $\mathfrak{B}_0 = K(\mathfrak{F})$ 和含 \mathfrak{F} 最小的 Borel 集合体 $\mathfrak{B}_0 = B(\mathfrak{F})$.

証明 取含有 \mathfrak{F} 的所有集合体 $\mathfrak{A} (\subset \mathfrak{P}(X))$ 的交集 $\mathfrak{B}_0 = K(\mathfrak{F})$, 則 \mathfrak{B}_0 就是所求的最小集合体, 同样可得最小的 Borel 集合体 $\mathfrak{B}_0 = B(\mathfrak{F})$. 証毕

[問題] 設有 \mathfrak{F} , 置 $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} \cup \{F^c; F \in \mathfrak{F}\}$, $\mathfrak{F}_2 = \{A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n; n=1, 2, \dots, A_i \in \mathfrak{F}_1\}$, $\mathfrak{F}_3 = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n; n=1, 2, \dots, A_i \in \mathfrak{F}_2\}$, 那么 $\mathfrak{F}_3 = K(\mathfrak{F})$.

19.5 設 $X = R$, $\mathfrak{F}^1 = \{[a, b); -\infty \leq a < b \leq +\infty\}$ ①, 則

$$K(\mathfrak{F}^1) = \{[a_1, b_1) \cup [a_2, b_2) \cup \dots \cup [a_n, b_n); n=1, 2, \dots, -\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \leq +\infty\}$$
 ②.

我們称 $B(\mathfrak{F}^1) = \mathfrak{B}^1$ 为 1 維 Borel 集合体, 称 $E \in \mathfrak{B}^1$ 为 1 維 Borel 集合. 由此可見:

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right), [a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b + \frac{1}{n} \right),$$

$$(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right]$$

及任意开集 $O = \bigcup_n (a_n, b_n)$, 閉集合 $A = R - O$, 都属于 \mathfrak{B}^1 . 此外,

$$G_\delta \text{ 集合 } E = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \quad (O_1 \supset O_2 \supset \dots) \text{ ③};$$

$$F_\sigma \text{ 集合 } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (A_1 \subset A_2 \subset \dots) \text{ ④}$$

① 此处应为: $-\infty < a < b \leq +\infty$, $-\infty < a_1 < b_1 < \dots$.——校者注

② 此处应为: $(O_1 \supset O_2 \supset \dots$ 为开集合)。——校者注

③ 此处应为: $(A_1 \subset A_2 \subset \dots$ 为閉集合)。——校者注

也属于 \mathfrak{B}^1 .

19.6 若 $X = R^n$, 置

$$\mathfrak{I}^n = \{[a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n]; \\ -\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty, i=1, \dots, n\} \textcircled{1},$$

但这里假定

$$[a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n); a_i \leq x_i < b_i, i=1, 2, \dots, n\},$$

则 $K(\mathfrak{I}^n)$ 成为这些不相交的区间 $\textcircled{2}$ 的有限和集的全体。

設 $\mathfrak{B}^n = B(\mathfrak{I}^n)$, 則称 \mathfrak{B}^n 为 n 維 Borel 集合体, 称 $E \in \mathfrak{B}^n$ 为 n 維 Borel 集合。

[問題] R^n 的所有开集合, 閉集合, G_δ 集合, F_σ 集合都属于 \mathfrak{B}^n .

現在来定义 Lebesgue 式测度 $\textcircled{3}$ 。首先規定記号 ∞ 的运算:

$$\infty + a = \infty, \infty + \infty = \infty, \lim \infty = \infty \quad (a \in R),$$

$$-\infty + a = -\infty, -\infty + (-\infty) = -\infty, \lim -\infty = -\infty \quad (a \in R),$$

$$a \times (\pm\infty) = \pm(\operatorname{sgn} a)\infty \quad (a \neq 0), \quad 0 \times \infty = 0,$$

但是 $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ 是沒有定义的。

19.7* 設有集 X , 并設 $\mathfrak{B} (\subset \mathfrak{P}(X))$ 是一 Borel 集合体。如
对每一 $A \in \mathfrak{B}$, 有一值 $m(A)$ 与之对应 ($0 \leq m(A) \leq \infty$), 并滿足:

$$\text{MI} \quad m(\emptyset) = 0,$$

$$\text{MII} \quad \text{設 } A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j), \text{ 則}$$

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

这时就說在 \mathfrak{B} 上定义了 Lebesgue 式测度 m 。如把集合 X , \mathfrak{B} 以及 m 合并一起来考虑, 則称它为测度空間, 記为

$$(X, \mathfrak{B}, m).$$

$\textcircled{1}$ 此处应为: $-\infty < a_i < b_i \leq +\infty$. ——校者注

$\textcircled{2}$ 这些区间不必是不相交的, 应删去“不相交的”。——校者注

$\textcircled{3}$ 在 §18 中談及的测度, 它的值是异于 $+\infty$ 的。

特別是, 當 $m(X) < \infty$ 時, 稱 m 為有界測度。此外, $m(X) = \infty$, 而且 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \mathfrak{B}$, $m(E_n) < \infty$ ($n=1, 2, \dots$) 的情形往往也是很重要的。這時稱 m 為準有界測度。

今後僅說測度時, 就是指 Lebesgue 式測度而言。

測度空間 (X, \mathfrak{B}, m) 定義之後, 下面就來討論它的性質。以下所考慮的集合 A, B, \dots , 除特別注明外, 都是屬於 \mathfrak{B} 的集合。

19.8 若 $A \subset B$, 那麼 $m(A) \leq m(B)$ 。一般來說,

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B).$$

証明 如果把 A, B 寫成: $A = (A \cap B) \cup (A - A \cap B)$, $B = (A \cap B) \cup (B - A \cap B)$, 那麼 $m(A) + m(B) = m(A \cap B) + m(A - A \cap B) + m(A \cap B) + m(B - A \cap B) = m(A \cap B) + m(A \cup B)$. 証畢

19.9 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

証明 若置 $B_n = A_n - (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ ($n=1, 2, \dots$), 就有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n \subset A_n, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

由此得 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. 証畢

19.10 (i) 若 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, 則 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim m(A_n)$.

(ii) 若 $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$; $m(A_1) < \infty$, 則

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim m(A_n).$$

(iii) 一般來說, 有下列不等式成立:

$$m(\lim A_n) \leq \lim m(A_n).$$

(iv) 若 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < +\infty$, 則 $m(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim} m(A_n)$.

(v) 特別是, 若 $A = \lim A_n$ 而且 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, 則

$$m(A) = \lim m(A_n).$$

証明 (i) 置 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n-1}) \cup \cdots$, 那么右边各项不相交, 由此 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n - A_{n-1})$ (設 $A_0 = \emptyset$). 此外因 $m(A_n) = \sum_{i=1}^n m(A_i - A_{i-1})$, 于是 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim m(A_n)$.

(ii) 置 $B_n = A_1 - A_n$ ($n=1, 2, \dots$), 因 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, 按照性质 (i), 有 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n) = m(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$. 另一方面, 因为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 故有 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = m(A_1) - m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$. 由此可見, 从 $m(A_1) < \infty$ 就得 (ii).

(iii) 若置 $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, 那么 $B_n \subset A_n$, 而且 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$. 所以, 由性质 (i) 可得 $m(\varliminf A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim m(B_n) \leq \varliminf m(A_n)$.

(iv) 如果設 $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 就有 $A_n \subset B_n$, 而且 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, 由假定 $m(B_1) < \infty$, 故按照 (ii) 即得 $m(\overline{\lim} A_n) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim m(B_n) \geq \overline{\lim} m(A_n)$.

(v) 可由 (iii) 及 (vi) 导出。

証毕

[問題] 在 (ii), (iv), (v) 中, 若把 $m(A_1) < \infty$, 或者 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ 条件取去, 那么所讲的结果一般是不成立的, 試举例說明。

19.10 在 (i), (iii) 两边或者一边的值, 纵使为 ∞ 也无妨。

测度空间的例子, 除 § 18 所述的 Lebesgue 测度 (但是关于 $m(A) = \infty$ 的集合需要稍为改正) 外, 还有下面一个很简单的例:

例 設 X 为任意集合, 又設 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$. 在 X 上取可数个点 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 使每一点分别对应于 $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ($p_i \geq 0$). 假定任意的 $E (\subset X)$, 只含 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, \dots$ 而不含其他点 a_n , 若規定

$$m(E) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots,$$

則 (X, \mathfrak{B}, m) 是測度空間。設 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$, 則 m 是有界測度, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, 那么就是准有界測度。(这就是所謂空間 X 中存在着质量为 p_1, p_2, \dots 的质点 a_1, a_2, \dots 的质量分布。)

§ 20 測度空間的构成 I (Carathéodory 的外測度, Jordan 測度的扩充)

在 §19 所述的測度空間, 其构成方法之一就是利用 Carathéodory 的外測度的方法。

20.1* 在集合 X 中, 对于所有的 $A \in \mathfrak{B}(X)$, 設有一个非負实数 $m^*(A)$ 与之对应 ($0 \leq m^*(A) \leq +\infty$), 并且滿足:

$$\text{OI} \quad m^*(\emptyset) = 0,$$

$$\text{OII} \quad A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B),$$

$$\text{OIII} \quad m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

則称 m^* 为 Carathéodory 的外測度

20.2 設在 $\mathfrak{B}(X)$ 上定义了 Carathéodory 的外測度 m^* . 設有某集合 $E \in \mathfrak{B}(X)$, 如果对于所有的 $A \in \mathfrak{B}(X)$ 皆有下面的不等式成立:

$$M^* \quad m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

那末称 E 为 m^* 可測。以 \mathfrak{B}^* 表示凡是 m^* 可測集合的全体, 則 \mathfrak{B}^* 是一 Borel 集合体, m^* 为 \mathfrak{B}^* 上的測度。

証明 (a) $\emptyset \in \mathfrak{B}^*$ 是不言而喻的。一般来講, 若 $m^*(\emptyset) = 0$, 則 $E \in \mathfrak{B}^*$.

(b) 若 $E \in \mathfrak{B}^*$, 则 $E^c \in \mathfrak{B}^*$, 这是很显然的。

(c) 茲証明: 若 $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{B}^*$ 及 $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 那末 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}^*$, $m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$,

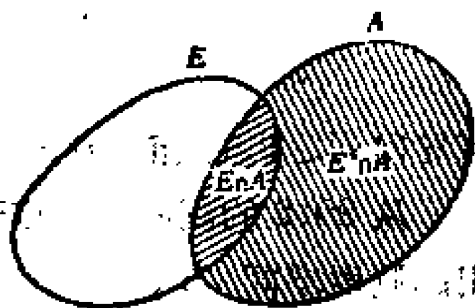


图 20.1

为此, 只要証明对于任意的 $A \in \mathfrak{B}(X)$ 及任意的 n , 成立不等式:

$$(*) \quad m^*(A) \geq \sum_{j=1}^n m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap E^c).$$

就可以了。事实上, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 我們从不等式(*)就有 $E \in \mathfrak{B}^*$ 及 $m^*(E) = \sum m^*(E_n)$ (只要置 $A = E$)。

至于(*)可用归纳法来証明。当 $n=1$ 时, 因 $E_1 \in \mathfrak{B}^*$, 不等式(*)显然成立。現設对 n , (*) 成立, 那么因 $E_{n+1} \in \mathfrak{B}^*$ 及

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(A \cap E_{n+1}) + m^*(A \cap E_{n+1}^c) \\ &\geq m^*(A \cap E_{n+1}) + \left\{ \sum_{j=1}^n m^*(A \cap E_{n+1}^c \cap E_j) \right. \\ &\quad \left. + m^*(A \cap E_{n+1}^c \cap E^c) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

可知对 $n+1$, (*) 也成立。即不等式(*)对于任意 n 都成立。

(d) 設 $E_1, E_2 \in \mathfrak{B}^*$, 則从

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\ &\geq \{m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \cap E_2^c)\} + m^*(A \cap E_1^c) \\ &\geq m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)^c) \end{aligned}$$

可导出 $E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{B}^*$ [此处用到

$$A \cap (E_1 \cap E_2)^c = (A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup (A \cap E_1^c).]$$

从上面 (a) ~ (d), 并参照 § 19, 可見 \mathfrak{B}^* 为 Borel 集合体, 从 (c) 可知 m^* 为 \mathfrak{B}^* 的测度。

証毕

20.3* 在测度空间 (X, \mathfrak{B}, m) , 如对任一个 $E(\subset X)$, 若

$$E \subset E_0, \quad E_0 \in \mathfrak{B}, \quad m(E_0) = 0$$

可导出 $E \in \mathfrak{B}$, (从而 $m(E) = 0$), 则称 (X, \mathfrak{B}, m) 为完备测度空间。

从 20.2 的证明, 可以理解 Carathéodory 的外测度 m^* 所导出的测度空间 (X, \mathfrak{B}^*, m^*) 是完备的。下而, 我们应用 Carathéodory 的外测度来扩充 Jordan 测度。

20.4* 首先, 以 \mathfrak{R} 表示在 X 上的一个集合体。所谓在 \mathfrak{R} 上定义了 Jordan 式测度, 意指: 对于每一个 $A \in \mathfrak{R}$, 就有一个非负实数 $v(A)$ ($0 \leq v(A) \leq \infty$) 与之对应, 并满足以下条件:

II 若 $A, B \in \mathfrak{R}$, $A \cap B = \emptyset$, 则 $v(A \cup B) = v(A) + v(B)$ 。

III $v(X) < \infty$, 或者 X 可表示为 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 这里 $E_n \in \mathfrak{R}$, $v(E_n) < \infty$ ($n=1, 2, \dots$)^①。

譬如:

20.5 在 19.5 的情形下, $X = R$, $\mathfrak{R}^1 = K(\mathfrak{I}^1)$, 我们置 $v([a, b]) = b - a$, 一般若 $E = \bigcup_{i=1}^r [a_i, b_i]$, $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$, 则置

$$v(E) = \sum_{i=1}^r (b_i - a_i),$$

那末, v 是 \mathfrak{R}^1 上的 Jordan 测度。

20.6 在 19.6 的情形下, $X = R^n$, $\mathfrak{R}^n = K(\mathfrak{I}^n)$, 我们置

$$v([a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

又对于一般的集合 E , 如果 $E = \bigcup_{i=1}^r [a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}; b_1^{(i)}, \dots, b_n^{(i)}]$ (右边每项不相交), 此时置

$$v(E) = \sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^n (b_j^{(i)} - a_j^{(i)})$$

① 这里的定义跟 §18 的定义稍有不同。

(这 E 的测度值的表示法是唯一的), 则 v 是 R^n 上的 Jordan 测度^①。

更一般的情形有:

20.7* 设在 X 上的集合体 \mathfrak{R} 上的 Jordan 式测度为 v , 如果在 Borel 集合体 $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{R})$ 上存在着测度 m , 而当 $E \in \mathfrak{R}$ 时有 $m(E) = v(E)$, 则称 m 为 v 的扩充。

20.8 扩充定理 集合体 \mathfrak{R} 上的 Jordan 式测度 v , 能扩充到 $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{R})$ 上的测度 m 的充要条件是 v 有下面的完全加法性:

v 的完全加法性 若 $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{R}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, 则 $v(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)$ 。

证明 必要性的证明是显然的。

充分性: (a) 对于任意的 $E \subset X$, 置

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n); E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathfrak{R} (n=1, 2, \dots) \right\},$$

那么 m^* 是 X 上的 Carathéodory 外测度。

实际上, OI, OII 没有证明的必要, 只要讨论 OIII 就可以了。兹设 E_1, E_2, \dots 为 X 上的子集合, 而且 $\sum m^*(E_n) < \infty$ 。按照上面的 $m^*(E)$ 的假设我们可选取这样的 $A_{n,k}$ 使得 $m^*(E_n)$

$+ \varepsilon/2^{n+1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} v(A_{n,k}), A_{n,k} \in \mathfrak{R}, E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$, 则从 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$, 可得 $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v(A_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^{n+1} = \sum m^*(E_n) + \varepsilon$ 。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, OIII 就成立了。

(b) 若置 \mathfrak{B}^* 为 m^* 可测集合的全体, 那末 $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{B}^*$ 。因为, 设 $A \in \mathfrak{R}, E \in \mathfrak{B}(X)$, 而 $m^*(A) < \infty$ 。对于任意 $\varepsilon > 0$, 若取满足

① 当 $E \in K(\mathfrak{B}^n)$ 时, E 不一定可表成 $\bigcup_{i=1}^r [a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}; b_1^{(i)}, \dots, b_n^{(i)}]$, 此时 $v(E)$ 也可类似地定义。——校者注

$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v(A_n) \leq m^*(E) + \varepsilon$ 的 $A_n \in \mathfrak{R}$, 则从 $E \cap A \subset$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)$, $E \cap A^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A^c)$ 得

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n \cap A^c) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n) \leq m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 为任意的, 故当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时知 A 为 m^* 可测。

(c) 现在证明 $m^*|_{\mathfrak{R}} = v$. 对于任意的 $A \in \mathfrak{R}$, 有 $m^*(A) \leq v(A)$, 这是不言而喻的, 设 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathfrak{R}$, 依照 v 的完全加法性有: $v(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)$, 因此, $v(A) \leq \inf \{\sum v(A_n)\} = m^*(A)$. 证毕

附注 $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{R})$ 上 v 的扩充 m 是唯一的。此处设 \mathfrak{B}^* 为关于 Carathéodory 外测度 m^* 可测的全体, 那么有:

C 对于任意的 $E^* \in \mathfrak{B}^*$, 存在着 $E_1, E_2 \in \mathfrak{B}$, 而且

$$E_1 \subset E^* \subset E_2, \quad m^*(E_2 - E_1) = 0.$$

证明 不妨设 $v(X) < \infty$, 对于任意的 $E^* \in \mathfrak{B}^*$, 取满足 $E^* \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}$, 而且 $m^*(E^*) + 1/n > \sum_{k=1}^{\infty} v(A_k^{(n)})$ 的 $A_k^{(n)} \in \mathfrak{R}$. 由此作 $E_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)} \in B(\mathfrak{R})$, 则 $E^* \subset E_2$, 而且有等式 $m^*(E^*) = m^*(E_2)$ 成立。同样对于 $E^{**} = X - E^*$, 可以取 $F_1 \in B(\mathfrak{R})$, 以致 $F_1 \supset E^{**}$, $m^*(F_1) = m^*(E^{**})$. 若置 $E_1 = F_1^c$, 那么 $E_1 \in B(\mathfrak{R})$, $E_1 \subset E^*$ 而且 $m^*(E_1) = m^*(E^*)$. 这两个 E_1, E_2 就是所求的了。至于 v 为准有界时的证明相同。 证毕

[问题] v 为 \mathfrak{R} 上完全加法性的充要条件是: 设 $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{R} \ominus$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, 而且 $v(A_1) < \infty$, 那么 $\lim v(A_n) = 0$.

当测度空间 (X, \mathfrak{B}, m) 不是完备的时候, 一定存在着唯一满

① 此处原书有脱, 应改为 $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$, ($A_n \in \mathfrak{R}$). ——校者注

足条件 0 的完备测度空間 (X, \mathfrak{B}^*, m^*) (这里 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^*$, $m^*|_{\mathfrak{B}} = m$). 这时称 (X, \mathfrak{B}^*, m^*) 为 (X, \mathfrak{B}, m) 的完备化空間, 特別, 用

$$\mathfrak{B}^* = \bar{\mathfrak{B}}, m^* = \bar{m}$$

来表示, 即 (X, \mathfrak{B}^*, m^*) 写成 $(X, \bar{\mathfrak{B}}, \bar{m})$.

完备化的存在証明: 設 \mathfrak{B}^* 表示滿足条件 0 的集合 E^* 的全体 (这里与 \mathfrak{B}^* 对应的集合族为 \mathfrak{B}), 則命 $m^*(E^*) = m(E_1) = m(E_2)$ 就可以了.

§ 21 Euclid 空間上的測度

应用 20.8 的扩充定理, 在 Euclid 空間能够构成特殊的 Lebesgue 测度. 我們在 § 20 已經討論过, 当 $X = R$ 时, 在 $\mathfrak{R}^1 = K(\mathfrak{I}^1)$ 上的 Jordan 测度 v_1 , 以及当 $X = R^n$ 时, 在 $\mathfrak{R}^n = K(\mathfrak{I}^n)$ 上的 Jordan 测度 v_n . 如果我們証明了它具有完全加法性, 則根据 20.8, 测度 m 在实际上也被构成了.

21.1 R^n 的集合体 $\mathfrak{R}^n = K(\mathfrak{I}^n)$ 上的测度 v_n , 在 \mathfrak{R}^n 上具有完全可加性.

証明 为了簡化起見, 只討論 $n=2$ 的情形.

(a) 設有界区間 $I = [a_1, a_2; b_1, b_2]$, $I_r = [a_1^{(r)}, a_2^{(r)}; b_1^{(r)}, b_2^{(r)}]$, $I = \bigcup_{r=1}^{\infty} I_r$, $I_i \cap I_j = \emptyset (i \neq j)$, 則有 $v(I) = \sum_{r=1}^{\infty} v(I_r)$. 这是由于: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 若置 $I^{\varepsilon} = [a_1, a_2; b_1 - \varepsilon, b_2 - \varepsilon]$, $I_r^{\varepsilon} = [a_1^{(r)} - \varepsilon/2^{r+2}, a_2^{(r)} - \varepsilon/2^{r+2}; b_1^{(r)}, b_2^{(r)}]$, 則有 $v(I^{\varepsilon}) \geq v(I) - 4\varepsilon l (l = \delta(I))$, $v(I_r^{\varepsilon}) \leq v(I_r) + \varepsilon l/2^r$. 另一方面, \bar{I}^{ε} 是有界閉集合, 从而是紧的, 因 $(I^{\varepsilon})^0$ 是开集而且 $\bar{I}^{\varepsilon} \subset I = \bigcup_{r=1}^{\infty} I_r \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} (I_r^{\varepsilon})^0$, 从紧性定义知存在一个 $N < +\infty$, 使得 $\bar{I}^{\varepsilon} \subset \bigcup_{r=1}^N I_r^{\varepsilon}$. 因此有下面的不等式成立:

$$v(I) - 4\varepsilon l \leq v(I^{\varepsilon}) \leq \sum_{r=1}^N v(I_r^{\varepsilon}) \leq \sum_{r=1}^N v(I_r) + \varepsilon l \sum_{r=1}^N 2^{-r}, \text{ 当 } \varepsilon \rightarrow 0$$

时,就有 $v(I) \leq \sum_{r=1}^{\infty} v(I_r)$. 至于反向的不等式 $v(I) \geq \sum_{r=1}^{\infty} v(I_r)$,

那是很显然的。这就证明了 $v(I) = \sum_{r=1}^{\infty} v(I_r)$.

(b) 若 $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{R}^n, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j), A = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r (v(A) < +\infty)$, 那么只要把 A 与 A_r 分解成为区间的和, 然后利用(a)的方法就可证明 $v(A) = \sum_{r=1}^{\infty} v(A_r)$.

(c) 当 $v(A) = +\infty$ 时的证明也是相同的。 証毕

由此可見, 依靠 20.8 的扩充定理, 可以把 v_n 一意地扩充到 n 維 Borel 集合体 $\mathfrak{B}^n = B(\mathfrak{R}^n)$ 上的测度。从 v_n 所构成的 Carathéodory 外测度記为 m^* , 以 \mathfrak{B}^* 表示凡是 m^* 可测集的全体, 那么在 20.8 的附注意义下有:

$$\mathfrak{B}^* = \bar{\mathfrak{B}}^n.$$

21.2* 在 Euclid 空间中, 称 v_n 在 $\bar{\mathfrak{B}}^n$ 上扩充的唯一确定的测度为 n 維 Lebesgue 测度, 今后用 m_n 表之。此外称 $E \in \bar{\mathfrak{B}}^n$ 为 Lebesgue 可测集。

所有的 (n 維) Borel 集合, 特别是所有的开集合、 G_δ 集合、 F_σ 集合 (关于 m_n) 都是可测集。一般来讲, 凡 m_n 可测集合 E 一定存在着满足 $E_1 \subset E \subset E_2, m(E_2 - E_1) = 0$ 的集合 $E_1, E_2 \in \mathfrak{B}^n$.

实际上, 为了定义 $m_n(E)$ 的值, 也要考虑如下的过程。(i) 因为开集合 O 能够表示为: $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \in \mathfrak{R}_n, I_k \cap I_j = \emptyset (i \neq j)$, 所以定义

$$m_n(O) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(I_k).$$

这个值不依赖于 O 的分割方法。(ii) 对于有界闭集合 F , 取充分大 N , 使得 $F \subset I^{(N)}$, 而 $I^{(N)} = (-N, \dots, -N; N, \dots, N)$. 因

为 $I^{(N)} - F$ 是开集合, 故定义 $m_n(F) = m_n(I^{(N)}) - m_n(I^{(N)} - F)$. 对于一般的闭集合 F , 定义 $m_n(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} m_n(I^{(N)} \cap F)$. (iii) 对于 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$, $O_1 \supset O_2 \supset \dots$, O_k 是开集合 (即 E 是 G_δ 集合), 定义 $m_n(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} m_n(E \cap I^{(N)})$, $m_n(E \cap I^{(N)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_n(O_k \cap I^{(N)})$. 此外, 对于 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, F_k 为闭集合 (即 E 为 F_σ 集合), 定义 $m_n(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_n(F_k)$. 更一般的是:

21.3 对于 R^n 的任意集合 E , 置

$$m_e(E) = \inf \{m_n(O); E \subset O \text{ (开集合)}\},$$

$$m_i(E) = \sup \{m_n(F); E \supset F \text{ (闭集合)}\},$$

称 $m_e(E)$ 为 E 的 Lebesgue 外测度, $m_i(E)$ 为 E 的 Lebesgue 内测度。因此存在两个集 E_1 (G_δ 集合), E_2 (F_σ 集合), 使得

$$E_1 \supset E, m_n(E_1) = m_e(E), E_1 \text{ 为 } G_\delta \text{ 集合},$$

$$E \supset E_2, m_n(E_2) = m_i(E), E_2 \text{ 为 } F_\sigma \text{ 集合}.$$

特别, E 为 Lebesgue 可测而且 $m_n(E) < \infty$ 的充要条件是 $m_e(E) = m_i(E) < \infty$.

証明 茲考虑 E 为有界而含于 $I^{(N)}$ 的情形。从 m_n 是 v_n 的扩充的定义, 对于一般集合 $E \subset R^n$, 有 $m^*(E) = \inf \{ \sum v_n(I_k); E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \in \mathfrak{R}_n \}$. 取具有 $I_k \subset I_k^*$ (开区間), $v_n(I_k) + \varepsilon/2^k \geq m_n(I_k^*)$ 这样性质的 I_k^* , 置 $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^*$ (开集合), 那末 $E \subset O$, $m_n(O) \leq \sum v(I_k) + \varepsilon$. 从而有 $m^*(E) = m_e(E)$. 在 $m^*(I^{(N+1)} - E) = m_e(I^{(N+1)} - E) = \inf \{m_n(O); I^{(N+1)} - E \subset O: \text{开集合}\}$ 等式中, 如果置 $F = I^{(N+1)} - O \cap I^{(N+1)}$, 那么 F 是闭集而 $F \subset E$, 从而得到 $m_i(E) = m_n(I^{(N+1)}) - m^*(I^{(N+1)} - E)$. 其次若 E 为 Lebesgue 可测, 则 $m_n(E) = m^*(E) = m_e(E)$, $m_n(E) = m_n(I^{(N+1)}) - m_n(I^{(N+1)} - E) = m_i(E)$. 反之, 若 $m_e(E) = m_i(E)$, 则成立等式: $m_n(I^{(N+1)})$

$=m^*(E) + m^*(I^{(N+1)} - E)$. 由此容易导出 E 是 m^* 可测 (即 Lebesgue 可测). (E 为无界的情形留给读者来证明.) 証毕

例 在 R 中, Cantor 集合 C 是闭集合, 它的测度为 $m_1(C) = 1 - (1/3) - 2(1/9) - \dots - 2^{n-1}(1/3)^n - \dots = 0$. 除此之外, 有理数全体 Q 是 F_σ 集合, 而且 $m_1(Q) = 0$.

再者, 在 §18 中已经把 Jordan 测度和 Lebesgue 测度作过比较, 从 Lebesgue 测度的观点来看, 可知 Jordan 测度有如下的性质, 即对于任意有界集合 $E (\subset R^n)$, 它的 Jordan 外测度为

$$\bar{v}(E) = m_n(\bar{E}),$$

它的 Jordan 内测度为

$$v(E) = m_n(E^\circ).$$

从而, E 为 Jordan 可测的充要条件是:

$$m_n(\bar{E}) = m_n(E^\circ) \quad \text{即} \quad m_n(E^r) = 0.$$

回顾一下上述的 Lebesgue 测度的构成法就立即可以理解下面的扩充是可能的。兹举 $n=1, 2$ 的情形作说明。

21.4* 在 R 上定义了一个非负实函数 $0 \leq F(x) < +\infty$, 并满足下面的条件:

- (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = M < \infty$;
- (ii) 对于 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim_{\delta \rightarrow 0} F(x+\delta) = F(x)$;
- (iii) 设 $x > y$, 有 $F(x) \geq F(y)$.

这时若置 $v_1([a, b]) = F(b) - F(a)$, 则 v_1 是在 \mathcal{R}_1 上的 Jordan 测度, 而且在 \mathcal{R}_1 上是完全加性的。由此一意地扩充到 Borel 集合体 \mathcal{B}_1 上的有界测度 m 我们称它做(由 F 来确定的)1维 Lebesgue-Stieltjes 测度。

例如, 若 $F(x) = 0$ ($-\infty < x \leq 0$), $F(x) = 1$ ($0 < x < \infty$) 而得到的测度就有 $m(E) = 1$ ($0 \in E$), $m(E) = 0$ ($0 \notin E$).

21.5* 设在 R^2 上定义的非负实函数 $F(x, y)$, ($0 \leq F(x, y)$)

$< +\infty$), 满足下面条件:

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F(x, y) = M < \infty$;

(ii) 对于 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ 有 $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0} F(x - \varepsilon_1, y - \varepsilon_2) = F(x, y)$;

(iii) 若 $\Delta = [x_1, x_2; y_1, y_2]$ 则有

$$F(\Delta) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

如命 $v_2(\Delta) = F(\Delta)$, 则 v_2 是 \mathfrak{R}_2 上的 Jordan 测度, 而且 (由 (ii)) 在 R_2 上是完全加法的, 由此一意地扩充到 Borel 集合体 \mathfrak{B}^2 上的有界测度 m , 称这个 m 为 (由 F 来确定的) 2 维 Lebesgue-Stieltjes 测度, 对于 m 来讲, 和 21.3 同样的结果也成立。

注意 反之, 对于定义在 Borel 集合体 \mathfrak{B}^2 上的任意的 (准) 有界测度 m ,

$$F(x, y) = m((-\infty, -\infty; x, y)),$$

则 $F(x, y)$ 是满足 21.4* 的 (i), (ii), (iii) 的。从而 \mathfrak{B}^2 的所有的测度, 必然可以用 Lebesgue-Stieltjes 测度来表示。从此, 固有的 Lebesgue 测度以下面性质作为它的特征:

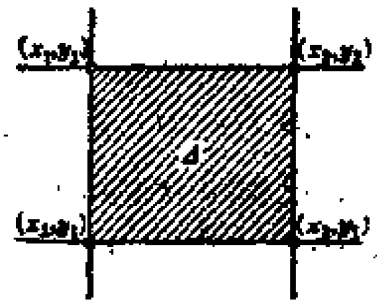


图 21.1

H 设 $E_1, E_2 \in \mathfrak{B}^2$, 若经过运动能重合, 则有 $m(E_1) = m(E_2)$.

以上对于 n 维的情形也同样成立。

§ 22 测度空间的构成 II (直积测度)

有几种方法可以从已给的测度空间导出其他的测度空间。

(I) 设 $Y \subset X$, 而且 $Y \in \mathfrak{B}$, 则命

$$\mathfrak{B}_Y = \{E; E \in \mathfrak{B} \text{ \& } E \subset Y\}, \quad m_Y(E) = m(E),$$

就得测度空间 (Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y) 。此外, 若 $Y \in \mathfrak{B}$, 因存在着 $Y^* \in \mathfrak{B}$, $Y \subset Y^*$, 使得对于任意 $Y \subset E, E \in \mathfrak{B}$, 有 $m(Y^*) \leq m(E)$ 。(譬如, m 为 Lebesgue 测度, 依 21.3, 取 Y^* 为 G_δ 集合。) 这时置

$$\mathfrak{B}_Y = \{E \cap Y; E \in \mathfrak{B}\}, \quad m_Y(E \cap Y) = m(E \cap Y^*),$$

于是就构成测度空间 (Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y) .

[問題] 証明上面的命題。

(II) 如测度空间 (Y, \mathfrak{B}, m) 与映象 $f: X \rightarrow Y$ 为已知, 則依 (I) 可在 $f(X) (\subset Y)$ 上构成测度空间, 若 $f(X) = Y$, 置

$$\mathfrak{B}_X = f^{-1}(\mathfrak{B}), m_X(f^{-1}(E)) = m(E) \quad (E \in \mathfrak{B}),$$

則得到新的测度空间 (X, \mathfrak{B}_X, m_X) .

(III) 如测度空间 (X, \mathfrak{B}, m) 及完全映射 $f: X \rightarrow Y$ 为已知, 若取

$\mathfrak{B}_Y = \{E; E \subset Y, f^{-1}(E) \in \mathfrak{B}\}, m_Y(E) = m(f^{-1}(E)) \quad (E \in \mathfrak{B}_Y)$, 則就构成测度空间 (Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y) .

[問題] 証明命題 (II) 与 (III)

(IV) 重要的是直积集合的情形。

設 $\mathfrak{R}_X, \mathfrak{R}_Y$ 分別为 X, Y 上的集合体, v_X, v_Y 分別为 $\mathfrak{R}_X, \mathfrak{R}_Y$ 上的已知 Jordan 测度。在直积集合 $Z = X \times Y$ 上, 作以集合 $\{A \times B; A \in \mathfrak{R}_X, B \in \mathfrak{R}_Y\}$ 的有限和为元素的集合体 \mathfrak{R}_Z . 这时也記

$$\mathfrak{R}_Z = \mathfrak{R}_X \times \mathfrak{R}_Y.$$

此外, 定义 \mathfrak{R}_Z 上的 Jordan 测度 v_Z 为 $v_Z(A \times B) = v_X(A) \cdot v_Y(B)$. 此时, 也記

$$v_Z = v_X \times v_Y.$$

22.1 設 v_X, v_Y 在 $\mathfrak{R}_X, \mathfrak{R}_Y$ 上是完全加法的, 那末 v_Z 在 \mathfrak{R}_Z 上也是完全加法的。

証明 依 20.8 的問題, 只要証明当 $E_1 \supset E_2 \supset \dots, E_n \in \mathfrak{R}_Z, v_Z(E_1) < +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} v_Z(E_n) = w > 0$ 时有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \emptyset$ 就成了。作 $E_n = \bigcup_{k=1}^{r_n} A_k^{(n)} \times B_k^{(n)}, A_k^{(n)} \in \mathfrak{R}_X, B_k^{(n)} \in \mathfrak{R}_Y, A_k^{(n)} \cap A_j^{(n)} = \emptyset (k \neq j)$, 但 $0 < v_X(A_k^{(n)}) < +\infty$, 此时不妨設 $A_k^{(n)}$ 含于 $A_j^{(n-1)}$, 这在証明中, 并不失去一般性。于此, 取某一个 $\epsilon > 0$, 使得 $\sum_{k=1}^{r_1} v_X(A_k^{(1)}) < \epsilon$,

$v_Y(B_k^{(1)}) < c (k=1, 2, \dots)$. 設 Σ' 為具有 $v_Y(B_k^{(n)}) > w/2c$ 那樣的 k 的和, 置 $A_n = \Sigma' A_k^{(n)}$. 由於 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $w \leq v_Z(E_n) \leq v_X(A_n)c + c(w/2c)$, 就有 $v_X(A_n) > w/2c (n=1, 2, \dots)$. 從 v_X 在 \mathfrak{B}_X 上的完全可加性, 可知存在一個 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 另一方面, 取 $x_0 \in A_n^{(n)}$, 就有 $B_1^{(1)} \supset B_2^{(2)} \supset \dots$, $v_Y(B_n^{(n)}) \geq w/2c > 0$. 從 v_Y 在 \mathfrak{B}_Y 上的完全可加性, 可知存在一個 $y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{(n)}$. 由是證明了 $(x_0, y_0) \in E_n (n=1, 2, \dots)$. 証畢

從上面知道, 當兩個測度空間 $(X, \mathfrak{B}_X, m_X), (Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y)$ 為已給的時候, 設 $Z = X \times Y$, $\mathfrak{B}_Z = B(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y)$, 那麼 $\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y$ 上的 $m_Z = m_X \times m_Y$ 可擴充到 \mathfrak{B}_Z 上的測度。它也可以同樣寫為:

$$m_Z = m_X \times m_Y,$$

稱它為 m_X 與 m_Y 的直積測度, 而稱

$$(X \times Y, B(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y), m_X \times m_Y)$$

為直積測度空間。

其次, 在測度空間 $(X \times Y, \mathfrak{B}_Z, m_Z)$ 上, 當 \mathfrak{B}_Z 為 $B(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y)$ 的完備化, 而在 $B(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y)$ 上有 $m_Z = m_X \times m_Y$ 的時候, 稱 $(X \times Y, \mathfrak{B}_Z, m_Z)$ 為完備直積測度空間。

[問題] m 維及 n 維的 Lebesgue 測度的 (完備) 直積測度, 是 $(m+n)$ 維的 Lebesgue 測度。

§ 25 要講的 Fubini 定理對於直積測度是非常重要的, 作為它的準備, 茲舉兩個結果于下。

22.2° 所謂在 X 上的集合族 $\mathfrak{N} (\subset \mathfrak{B}(X))$ 是正規集合族, 意指 \mathfrak{N} 滿足下列條件: (i) 若 $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{N}$, $E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$, 那麼 $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathfrak{N}$, (ii) 若 $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{N}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, 那末 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{N}$, (iii) 若 $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{N}$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, 那末 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{N}$. 對於任意一個已知集合族 $\mathfrak{S} (\subset \mathfrak{B}(X))$, 存在着一個含 \mathfrak{S} 的最小的正規集合族。記它為 $N(\mathfrak{S})$.

22.3 設 $\mathfrak{R}(\subset \mathfrak{P}(X))$ 为集合体, 則有 $N(\mathfrak{R}) = B(\mathfrak{R})$.

証明 Borel 集合体具有正規集合族的性質 (i), (ii), (iii), 故一般来講有 $N(\mathfrak{R}) \subset B(\mathfrak{R})$. 因此只要証明 $N(\mathfrak{R})$ 是 Borel 集合体就够了. 依 §19.3 的問題, 我們知道只要証明: “若 $E_1, E_2 \in N(\mathfrak{R})$, 則 $E_1 \cap E_2 \in N(\mathfrak{R})$ ” 及 “若 $E_1 \in N(\mathfrak{R})$, 則 $E_1^c \in N(\mathfrak{R})$ ” 就成了. 首先, 对于所有的 $E \in \mathfrak{R}$, 記凡有 $A \cap E \in N(\mathfrak{R})$ 那样的 $A (\in \mathfrak{P}(X))$ 的全体为 \mathfrak{R}_1 . 显然 \mathfrak{R}_1 为含 \mathfrak{R} 的正規集合族, 由此 $N(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}_1$. 其次, 对于所有的 $E \in N(\mathfrak{R})$, 有 $A \cap E \in N(\mathfrak{R})$ 那样性質的 $A (\in \mathfrak{P}(X))$ 的全体記为 \mathfrak{R}_2 , 显然 \mathfrak{R}_2 为含 \mathfrak{R} 的正規集合族, 由此 $N(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}_2$. 这样就可証明需要証明的前半部. 后半部同样証明, E 及 E^c 都属于 $N(\mathfrak{R})$ 那样的 E 的全体, 可見是含 \mathfrak{R} 的正規集合族. 証毕

22.4 在測度空間 $(X, \mathfrak{B}_X, m_X), (Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y)$, 設 $Z = X \times Y, \mathfrak{B}_Z = B(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y), m_Z = m_X \times m_Y$. 对于任意的 $E \in \mathfrak{B}_Z$, 关于 $y = y_0 (\in Y)$ 的截口集合 $E_X(y_0) = \{x; x \in X, (x, y_0) \in E\}$ 及关于任意 $x = x_0 (\in X)$ 的截口集合 $E_Y(x_0)$, 它們分別属于 $\mathfrak{B}_X, \mathfrak{B}_Y$.

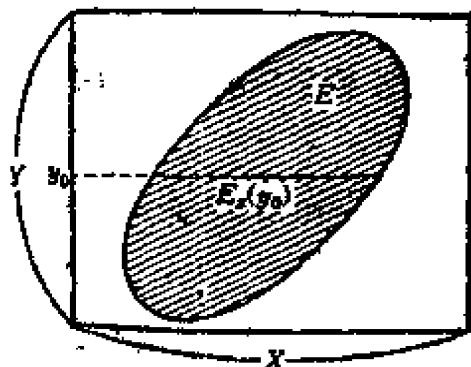


图 22.1

証明: (i) 对于 $E \in \mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y$, 上面的性質成立是显然的.

(ii) 以 \mathfrak{R} 表示成立上面性質的 $E (\subset Z)$ 的全体, 則可直接推出 \mathfrak{R} 是正規集合族, 由此从 22.3 可知 $B(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y) \subset \mathfrak{R}$. 証毕

注意 特別是当 $(X, \mathfrak{B}_X, m_X), (Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y)$ 为完备測度空間而 (Z, \mathfrak{B}_Z, m_Z) 为完备直积測度空間. 对于 $E \in \mathfrak{B}_Z$, 可以証明必可取具有 $A_0 \in \mathfrak{B}_X, m_X(A_0) = 0$ 及 $B_0 \in \mathfrak{B}_Y, m_Y(B_0) = 0$ 性質的 A_0 及 B_0 , 使 $y_0 \in B_0$ 时有 $E_X(y_0) \in \mathfrak{B}_X$; 而 $x_0 \in A_0$ 时則有 $E_Y(x_0) \in \mathfrak{B}_Y$.

第 5 章 Lebesgue 积分

§ 23 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的比较

让我们先来叙述一下 Lebesgue 积分比 Riemann 积分有哪些优点。为此,从温习一般的 Riemann 积分着手。

设 X 为 R^n 中的单位立方体,即 $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n\}$, \mathfrak{R} 为 X 中所有 Jordan 可测集的全体, v 为在 \mathfrak{R} 上的测度 (§ 18)。因此 $v(X) = 1$ 。兹考虑在 X 上定义的有界实函数 $f(x)$ 。

所谓 $\Delta = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ 是属于 X 上的 \mathfrak{R} 的分割是指 $E_i \in \mathfrak{R} (i=1, \dots, r)$, 而且

$$X = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r,$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

对于这个分割 Δ , 置

$$\bar{M}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^r \alpha_i v(E_i),$$

$$\alpha_i = \sup \{f(x); x \in E_i\};$$

$$\underline{M}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^r \beta_i v(E_i),$$

$$\beta_i = \inf \{f(x); x \in E_i\}.$$

那么,若 $|f(x)| \leq K$, 就有 $-K \leq \underline{M}(f, \Delta) \leq \bar{M}(f, \Delta) \leq K$ 。

设 $\Delta = \{E_i; i=1, \dots, r\}$, $\Delta' = \{E'_j; j=1, \dots, s\}$ 为 \mathfrak{R} 的两个分割, 作它们的共同细分 $\Delta'' = \Delta \cap \Delta' = \{E_i \cap E'_j; i=1, \dots, r, j=1, \dots, s\}$ 。从定义直接可知 $\bar{M}(f, \Delta) \geq \bar{M}(f, \Delta'')$, $\bar{M}(f, \Delta') \geq \bar{M}(f, \Delta'')$, $\underline{M}(f, \Delta) \leq \underline{M}(f, \Delta'')$, $\underline{M}(f, \Delta') \leq \underline{M}(f, \Delta'')$ 。取

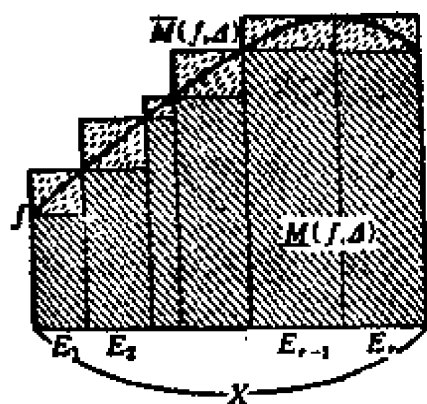


图 23.1

所有属于 \mathfrak{R} 的分割 Δ 的 \sup, \inf , 并置

$$\overline{M}(f) = \inf \{ \overline{M}(f, \Delta) \}, \quad \underline{M}(f) = \sup \{ \underline{M}(f, \Delta) \},$$

显然有 $\overline{M}(f) \geq \underline{M}(f)$. 这时, 我们分别称 $\overline{M}(f), \underline{M}(f)$ 为 $f(x)$ 的上积分与下积分。如果 $\overline{M}(f) = \underline{M}(f)$, 则称 $f(x)$ 为 Riemann 可积, 它的值用

$$\int_X f(x) v(dx) \quad \text{或} \quad \int_X f(x) dv$$

来表示, 并称之为 $f(x)$ 在 X 上的 Riemann 积分。 $f(x)$ 为 Riemann 可积的充要条件是: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在着一个属于 \mathfrak{R} 的分割 $\Delta = \{E_i; i=1, 2, \dots, r\}$, 使得

$$\text{Osc}(f, \Delta) = \overline{M}(f, \Delta) - \underline{M}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^r (\alpha_i - \beta_i) v(E_i) < \varepsilon.$$

例如: 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $f(x)$ 在闭区间 X 上一致连续, 只要分割的小区間充分小, 那么 $\text{Osc}(f, \Delta)$ 可以小至任何程度。因此, 所有连续函数 $f(x)$ 都为 Riemann 可积。

现在设 \mathfrak{R} 为 Jordan 测度空间 (X, \mathfrak{R}, v) 上所有 Riemann 可积的有界实函数的全体, 则 \mathfrak{R} 有如下的性质:

(i) 常数 1 属于 \mathfrak{R} , 而 $\int_X 1(x) dv = 1$;

(ii) 若 $f, g \in \mathfrak{R}$, α, β 为实数, 则 $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{R}$ 而且

$$\int_X (\alpha f + \beta g) dv = \alpha \int_X f dv + \beta \int_X g dv;$$

(iii) 设 $f \in \mathfrak{R}$, 而且在 X 上 $f(x) \geq 0$, 则

$$\int_X f dv \geq 0;$$

(iv) 设 $f_1, f_2, \dots \in \mathfrak{R}$, 而且在 X 上 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_0(x)$ 一致成立, 则 $f_0 \in \mathfrak{R}$, 并有

$$\int_X f_0 dv = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k dv.$$

现在来讨论一下用 Lebesgue 测度代替 Jordan 可测集合作成

的集合体 \mathfrak{R} 上的 ν 以后发生的变化。至于 Lebesgue 积分的定义将在后面叙述。设 \mathfrak{L} 为 X 上 Lebesgue 可积函数 $f(x)$ (不一定有界) 的全体, 为了区别于其他积分, 在积分符号前附以记号 (L) 。以后将可知道, 它具有下面的性质:

(0) 若 $f \in \mathfrak{R}$, 则 $f \in \mathfrak{L}$, 而且

$$\int_X f d\nu = (L) \int_X f dm.$$

(i), (ii), (iii), (iv) 在 \mathfrak{L} 上也成立。

(v) 设 $f, f_1, f_2, \dots \in \mathfrak{L}, f \geq 0, |f_n(x)| \leq f(x) (n=1, 2, \dots)$, 并设 $\lim f_n(x) = f_0(x)$ 存在 (不一定是一致收敛), 则 $f_0 \in \mathfrak{L}$ 而且

$$(L) \int_X f_0 dm = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_X f_k dm.$$

条件 (iv) 比条件 (v) 来得强, 以后将可以看到, 这点是非常重要的。尽管 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的差别不仅在 (v) 这一条, 但在实际上, 应用到的 Lebesgue 积分的性质并不很多, 例如掌握好上面的 (v) 和以后即将讲到的 Fatou 不等式 (25.7) 及 Fubini 定理 (25.10), 则在一般应用上已很足够了。

注意 (v) 中 f_1, f_2, \dots 和 $|f_n(x)| \leq f(x) (\geq 0)$ 的 $f(x)$ 必须属于 \mathfrak{L} 这些条件是很重要的, 例如, 在 $X=[0, 1]$ 时置 $f_n(x) = 0 (0 \leq x \leq 1 - 1/n), f_n(x) = n(1 - 1/n < x \leq 1)$, 就有 $(L) \int_X f_n dm = 1, \lim f_n = 0$, 这样, (v) 的公式就不成立。

但是, 给定了一个测度空间 (X, \mathfrak{B}, m) 之后, 对于定义在 X 上的实函数 $f(x)$ 来说, (i) $f(x)$ 的可积性定义和 (ii) $f(x)$ 的积分定义究竟应如何确定才好呢? 可用的方法很多, 这些方法虽然形式不同, 但在本质上都没有什么大的区别。兹举下面的三种方法作为例子。为了叙述简单起见, 不妨假定 $m(X) < \infty, 0 \leq f(x) \leq K$ 。

(I) 作由实数 $R, 1$ 维 Borel 集合体 \mathfrak{B}^1 , Lebesgue 测度 m_1 所构成的测度空间 (R, \mathfrak{B}^1, m_1) 与 (X, \mathfrak{B}, m) 的直积空间 $(X \times R,$

$B(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}^1)$, μ ($\mu = m \times m_1$). 其次, 作 $f(x)$ 的纵线集合

$$J(f) = \{(x, y); x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

(i) 当 $J(f) \in B(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}^1)$ 时, 称 $f(x)$ 为可积 (或称积分可能). (ii) 这时它的积分定义为

$$\int_X f(x) dm = \mu(J(f)).$$

(II) 如果 $f(x)$ 在 (i) 的意义下可积,

依照 22.4^①, 可知截口集合

$$E(f, a) = \{x; x \in X, f(x) \geq a\}$$

对于所有的 $a \in R$ 都有 $E(f, a) \in \mathfrak{B}$. 现在就从这个性质来定义 $f(x)$ 的可测性. 所谓定义在 X 上的实函数 $f(x)$ 为 \mathfrak{B} 可测, 意指对于任意的 $a \in R$, 都有 $E(f, a) \in \mathfrak{B}$.

对于任意自然数 n , 置

$$f_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{E(f, r/2^n)},$$

则 $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots$, 而且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. 从而置

$$J_n(f) = \bigcup_{r=0}^{\infty} E(f, r/2^n) \times (r/2^n, (r+1)/2^n]$$

(即 $f_n(x)$ 的纵线集合), 就有

$$J_1(f) \supset J_2(f) \supset \dots,$$

$$J(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n(f),$$

故

$$\mu(J(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(J_n(f))$$

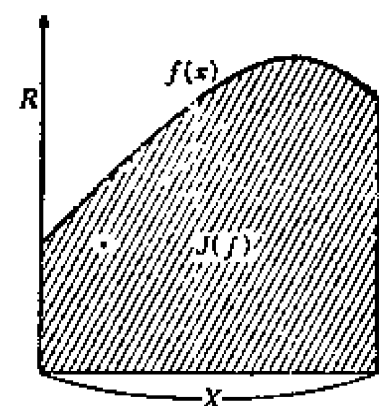


图 23.2

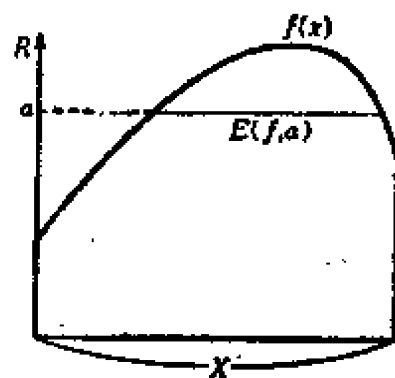


图 23.3

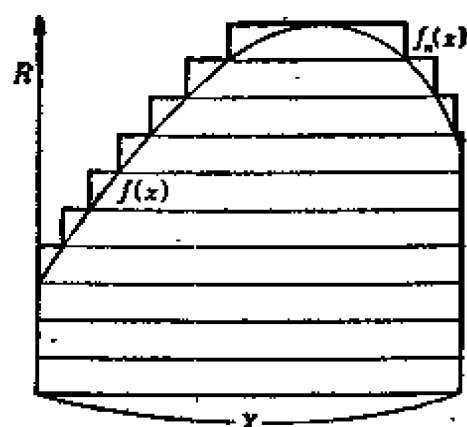


图 23.4

① 这里不能立即由 22.4 推出 $E(f, a)$ 为可测, 但可仿照 22.4 证明。——校者注

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} m(E(f, r/2^n)),$$

也就是說, $f(x)$ 的积分可表达为

$$(*) \quad \int_X f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{\infty} m(E(f, r/2^n)).$$

因此, 如果一开始便考虑 f 为 \mathfrak{B} 可测函数的話, 那么它的积分就可由 (*) 来定义。

反过来, 如果 $f(x)$ 为 \mathfrak{B} 可测, 則它在 (I) 的意义下必定可积。这可由 $J_n(f) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}^1$, 从而有 $J(f) = \bigcap J_n(f) \in B(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}^1)$ 的事实得到証明。

注意 (1) 特别是当 (X, \mathfrak{B}, m) 为完备测度空間时, 它和 (R, \mathfrak{B}^1, m_1) 的直积空間也用完备直积测度空間 $(X \times R, \overline{B(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}^1)}, \bar{\mu})$ 来代替, (I), (II) 的結果仍无改变。这是因为, 根据 §22 末的附注, 对于 $B(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}^1)$ 可测集合 $J(f)$ 來說, 除了某一 m_1 测度为 0 的集合 $A (\subset R)$ 的 a 以外, 都有 $E(f, a) \in \mathfrak{B}$ 。另一方面, 当 $a > a'$ 时, 有 $E(f, a) \subset E(f, a')$, 又当 $a_n < a$, $\lim a_n = a$ 时, 有 $E(f, a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f, a_n)$, 因此, 实际上并无把这样的集合 A 除外的必要。

(2) 如果 $|f(x)| \leq K$, 那么, 由于 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, 而这里 $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$, 显然, 可以归到 $f(x) \geq 0$ 的情形。

(III) 第三种方法可說与定义 Riemann 积分的方法完全相同。那就是, 对于测度空間 (X, \mathfrak{B}, m) , 作属于 \mathfrak{B} 的分割 $\Delta = \{E_i; i=1, 2, \dots, r\}$ ($E_i \in \mathfrak{B}, i=1, \dots, r$)。对于定义在 X 上的函数 f , 和 Riemann 积分一样定义 $\bar{M}(f, \Delta)$, $\underline{M}(f, \Delta)$ 。考虑所有这样的分割 Δ , 从而定义 $\bar{M}(f)$, $\underline{M}(f)$, 当 $\bar{M}(f) = \underline{M}(f)$ 时, 便称 f 为可积。并且称 $\bar{M}(f) = \underline{M}(f)$ 的值为 f 在 X 上的积分。

凡是 \mathfrak{B} 可测的函数 $f (0 \leq f(x) \leq K)$ 在这样的意义下是可积的。理由是: 只須作

$$\Delta_n = \{E(f, 0) - E(f, 1/n), E(f, 1/n) - E(f, 2/n), \dots, E(f, i/n) - E(f, (i+1)/n), \dots\}$$

(这实际是一个有限分割), 则由不等式

$$\overline{M}(f, \Delta_n) - \underline{M}(f, \Delta_n)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} m(E(f, i/n) - E(f, (i+1)/n)) = \frac{1}{n} m(X) \rightarrow 0$$

即可得证其可积性。其次, $\overline{M}(f) = \underline{M}(f) = \lim \overline{M}(f, \Delta_n)$ 的值与 (*) 也完全一致。

反过来, 在 (III) 意义下可积的 f 虽不一定为 \mathfrak{B} 可测, 但如 $\overline{\mathfrak{B}}$ 是 \mathfrak{B} 关于 m 的完备化, 则可证明 f 为 $\overline{\mathfrak{B}}$ 可测 (证明从略, 参看书末文献“河田 [4]”)。

以上说明了 (I), (II) 及 (III) (当 (X, \mathfrak{B}, m) 为完备时) 的等价性, 其中最方便的要算是 (II) 的方法, 在下节还要加以说明。

§ 24 可测函数

24.1* 设在集合 X 上给定了一个 Borel 集合体 $\mathfrak{B} (\subset \mathfrak{B}(X))$, 所谓定义在 X 上的实函数 $f(x)$ 为 \mathfrak{B} 可测, 意指: 对于所有实数 $a \in R$,

$$E(f, a) = \{x; x \in X, f(x) \geq a\}$$

都属于 \mathfrak{B} 。这时, 所有下面的集合

$$\{x; x \in X, f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x; x \in X, f(x) \geq a + 1/n\},$$

$$\{x; x \in X, f(x) \leq a\} = X - \{x; f(x) > a\},$$

$$\{x; x \in X, f(x) < a\} = X - \{x, f(x) \geq a\}$$

也都属于 \mathfrak{B} 。

24.2 若 $f(x)$ 为 \mathfrak{B} 可测函数, 则对于任意 1 维 Borel 集合 A , 有

$$\{x; x \in X, f(x) \in A\} \in \mathfrak{B}.$$

证明 对于 \mathfrak{B} 可测函数 $f(x)$ 而言, 具有上面性质的 $A (\in \mathfrak{B}(R))$ 的全体, 显然构成一个包含 $\mathfrak{B}^1 (= K\mathfrak{B}^1)$ 的 Borel 集合体。因

此, 對於 $A \in B(\mathbb{R}^1) = \mathfrak{B}^1$, 當然有 $\{x; x \in X, f(x) \in A\} \in \mathfrak{B}$. 証畢

24.3* 在 n 維 Euclid 空間 R^n 中, 關於 n 維 Borel 集合體 \mathfrak{B}^n 為可測的函數 f , 稱為 **Baire 函數**.

24.4 設 X 上的函數 $g_1(x), \dots, g_n(x)$ 為 \mathfrak{B} 可測, 而 $f(t_1, \dots, t_n)$ 為 R^n 上的 Baire 函數, 那末 $F(x) = f(g_1(x), \dots, g_n(x))$ 為 \mathfrak{B} 可測函數。

證明 對於 $I = (-\infty, \dots, -\infty; a_1, \dots, a_n)$, 有 $\{x; x \in X, (g_1(x), \dots, g_n(x)) \in I\} = \bigcap_{k=1}^n \{x; g_k(x) < a_k\} \in \mathfrak{B}$. 因此, 跟 24.2 一樣, 對於任意的 $A \in \mathfrak{B}^n$, 有 $\{x; (g_1(x), \dots, g_n(x)) \in A\} \in \mathfrak{B}$. 由此可見, 如果置 $A = \{(t_1, \dots, t_n); f(t_1, \dots, t_n) \geq a\}$, 那麼 $\{x; F(x) \geq a\} = \{x; (g_1(x), \dots, g_n(x)) \in A\} \in \mathfrak{B}$. 証畢

24.5 若 $f(x), g(x)$ 為 \mathfrak{B} 可測, 那麼 $af(x) + bg(x), f(x)g(x), |f(x)|, f^+(x) = \max(f(x), 0), f^-(x) = \max(-f(x), 0), \max(f(x), g(x)), \min(f(x), g(x))$ 都為 \mathfrak{B} 可測。此外, 若 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 為 \mathfrak{B} 可測, 則 $\sup\{f_n(x); n=1, 2, \dots\}, \inf\{f_n(x); n=1, 2, \dots\}, \overline{\lim} f_n(x), \underline{\lim} f_n(x)$ (若 $\lim f_n(x)$ 存在的話), $\lim f_n(x)$ 都是 \mathfrak{B} 可測。

證明 由於 $f(t_1, t_2) = at_1 + bt_2, f(t_1, t_2) = t_1 t_2, f(t) = |t|, f(t) = \max(t, 0), f(t) = \max(-t, 0), f(t_1, t_2) = \max(t_1, t_2)$ 等都是 Baire 函數, 故定理的前半部可由上面的 24.4 直接導出。現証定理的後半部: 對於 $f(x) = \sup\{f_n(x); n=1, 2, \dots\}$, 有 $\{x; f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x; f_n(x) > a\} \in \mathfrak{B}$, 但 $E(f, a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x; f(x) > a - 1/n\} \in \mathfrak{B}$, 故 $f(x)$ 為可測。同樣, 對於 $f(x) = \inf\{f_n(x); n=1, 2, \dots\}$, 有 $E(f, a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n, a) \in \mathfrak{B}$. 其次 $\overline{\lim} f_n(x)$ 可表示成: $\overline{\lim} f_n(x) = \inf\{g_n(x); n=1, 2, \dots\}$, 這裡, $g_n(x) = \sup\{f_k(x); k=n, n+1, \dots\}$, 利用上面已証明的 $\sup\{f_k(x)\}$ 及 $\inf\{f_k(x)\}$ 的可測性, 可見 $\overline{\lim} f_n(x)$ 亦為可測。同樣可証 $\underline{\lim} f_n(x), \lim f_n(x)$ 亦可

測。

証毕

[問題] R^n 上的連續函数为 Baire 函数。

最简单的 \mathfrak{B} 可測函数称为 \mathfrak{B} 简单函数。設有互不相交的集合 $A_1, \dots, A_r \in \mathfrak{B}$, 又設 $a_1, a_2, \dots, a_r \in R$, 置

$$f(x) = \sum_{k=1}^r a_k \chi_{A_k}(x),$$

則称 $f(x)$ 为 \mathfrak{B} 简单函数。也就是說: 它在 $x \in A_i$ 时等于 a_i , 而在

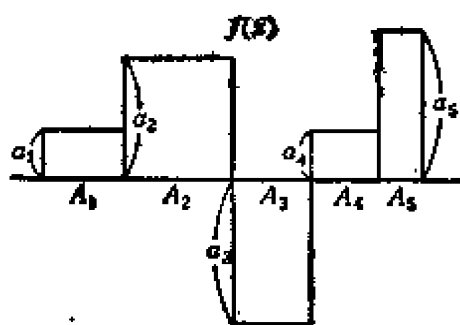


图 24.1

$x \in X - \bigcup_{k=1}^r A_k$ 时等于 0. 显然, \mathfrak{B} 简单函数为 \mathfrak{B} 可測。又如 f, g 为 \mathfrak{B} 简单函数, 則 $af + bg, f \cdot g, |f|, f^+, f^-$ 亦为 \mathfrak{B} 简单函数。

24.6 任一 \mathfrak{B} 可測函数 $f(x) \geq 0$

可表为单调不减的 \mathfrak{B} 简单函数列 $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ 的极限, 即 $f(x) = \lim f_n(x)$ (显然 $f_1(x), f_2(x), \dots$ 的取法不是唯一的)。

証明 例如取 $f_n(x) = n$ (当 $f(x) \geq n$ 时), $f_n(x) = (r-1)/2^n$ (当 $(r-1)/2^n \leq f(x) < r/2^n$ 时) ($r=1, 2, \dots, n \cdot 2^n$) 便是一种符合要求的选法。

証毕

設 (X, \mathfrak{B}, m) 为测度空間。若两个 \mathfrak{B} 可測函数 $f(x), g(x)$ 滿足等式

$$m(\{x; x \in X, f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

則称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价, 并記之为 $f \sim g$. 显然它具有等价关系。

$A \in \mathfrak{B}, m(A) = 0$ 那样的集合 A 称为零集合 (請注意零集合与空集合的区别)。此后把“除了某个零集外”改說成“几乎处处”。例如, $f \sim g$ 可以說: 等式 $f(x) = g(x)$ 几乎处处成立。

此外, 今后将容許可測函数 $f(x)$ 在某零集合上取 ∞ 或 $-\infty$ 的值, 也就是說, 只假定它几乎处处为有限。

24.7 Egoroff 定理 在有界测度空间 (X, \mathfrak{B}, m) 中, 設有 \mathfrak{B} 可测函数列 $f_1(x), f_2(x), \dots$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 則对任意的 $\varepsilon > 0$, 总可适当选取满足 $m(H) < \varepsilon$ 的 $H \in \mathfrak{B}$, 使得在 $X - H$ 上 $\lim f_n(x) = f(x)$ 为一致收敛。

証明 設 $A \in \mathfrak{B}, m(A) = 0$, 当 $x \in X - A$ 时, $\lim f_n(x) = f(x)$. 置 $A_n(\varepsilon) = \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\}$, 則 $A_n(\varepsilon) \in \mathfrak{B}, A_1(\varepsilon) \subset A_2(\varepsilon) \subset \dots, \lim A_n(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon) \supset X - A$. 从而对于充分大的 n_r , 有 $m(A_{n_r}(1/2^r)) > m(X) - 1/2^r$. 現在, 对于所給的 $\varepsilon > 0$, 取 $1/2^m < \varepsilon$, 并置 $H = X - \bigcap_{r=m+1}^{\infty} A_{n_r}(1/2^r) = \bigcup_{r=m+1}^{\infty} A_{n_r}(1/2^r)^c \in \mathfrak{B}$, 那么, 一方面有 $m(H) \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} m(A_{n_r}(1/2^r)^c) \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} 1/2^r = 1/2^m < \varepsilon$, 另一方面在 $X - H$ 上 $\lim f_n(x) = f(x)$ 的收敛是一致的。 証毕

§ 25 Lebesgue 式积分

今后, 当测度空间 (X, \mathfrak{B}, m) 給定的时候, 凡 \mathfrak{B} 可测, \mathfrak{B} 简单函数分別簡称为可测函数与简单函数。

25.1* 首先, 对于简单函数 $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r a_i \chi_{E_i}(x)$ ($E_i \in \mathfrak{B}, E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$) 定义它的积分为

(i) 当 $\varphi(x) \geq 0$, 也即 $a_1 \geq 0, \dots, a_r \geq 0$ 的时候, 若 $A \in \mathfrak{B}$, 定义

$$\int_A \varphi(x) dm = \sum_{i=1}^r a_i m(E_i \cap A) \leq \infty.$$

(注意: $0 \times \infty = 0$.)

(ii) 对于一般的简单函数 $\varphi(x)$, 可將它表达为两个不取負值的简单函数之差: $\varphi(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x)$ ($\varphi^+(x) = \max(\varphi(x), 0)$, $\varphi^-(x) = \max(-\varphi(x), 0)$), 而一般地定义它的积分为

$$\int_A \varphi(x) dm = \int_A \varphi^+(x) dm - \int_A \varphi^-(x) dm.$$

但在右边成为 $\infty - \infty$ 的形式时, $\varphi(x)$ 之积分不予定义。当上面的积分为有限时, 称 $f(x)$ 在 A 上可积(或称积分可能)。

25.2 如简单函数 $\varphi(x) \geq 0$, $\psi(x) \geq 0$, 而且 $A, B \in \mathfrak{B}$ ($A \cap B = \emptyset$), $a \geq 0$, $b \geq 0$, 则下列等式成立:

$$\int_A \{a\varphi(x) + b\psi(x)\} dm = a \int_A \varphi(x) dm + b \int_A \psi(x) dm,$$

$$\int_{A \cup B} \varphi(x) dm = \int_A \varphi(x) dm + \int_B \varphi(x) dm.$$

又 $\varphi(x)$, $\psi(x)$, a , b 即使不 ≥ 0 , 只要 φ 及 ψ 在 A (及 B) 上可积, 上面的等式仍然成立。

这一定理几乎是不证自明的。

25.3* 设可测函数 $f(x) \geq 0$, 我们定义 $f(x)$ 在 $A \in \mathfrak{B}$ 上的积分为

$$(*) \quad \int_A f(x) dm = \sup \left\{ \int_A \varphi(x) dm; \right.$$

$$\left. 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) (x \in A), \varphi \text{ 为简单函数} \right\} \leq \infty.$$

对于一般的可测函数 $f(x)$, 利用 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ 的表达式, 定义它的积分为

$$\int_A f(x) dm = \int_A f^+(x) dm - \int_A f^-(x) dm.$$

象上面一样, 如果右边成为 $\infty - \infty$ 的形式时, $f(x)$ 在 A 上之积分也不予定义。如右边的值为有限, 则称 $f(x)$ 在 A 上可积(或称积分可能)。

也就是说, 可测函数 $f(x)$ 在 $A \in \mathfrak{B}$ 上或者积分不定, 或者积分确定。而在积分确定的情形下函数 $f(x)$ 或者可积(即积分值有限), 或者积分为 ∞ 或 $-\infty$ 。

记号 dm 常用带有变数 x 的 $m(dx)$ 来代替。

从积分定义直接得

(i) 若 $m(A)=0$, 則对于任意可测函数 $f(x)$, 有

$$\int_A f(x) dm = 0.$$

(ii) 若 $f \sim g$, $A \in \mathfrak{B}$, 則在 A 上函数 f, g 的积分或同时不定, 或同时确定。如属确定, 必

$$\int_A f(x) dm = \int_A g(x) dm.$$

这就是說, 关于 f, g 的积分并无区别。

积分定义(*)虽然有点抽象, 但由下面的定理就会渐趋明朗。

25.4 可测函数 $f(x) \geq 0$ 表示为简单函数的不减序列 $\{\varphi_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) 的极限时, 即

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad (x \in A),$$

則有
$$\int_A f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) dm$$

(即使两边都为 ∞ 也无妨)。

証明 由积分的定义, 显然有(左边) \geq (右边)。要証明反向的不等式, 只須証明对于任意的简单函数 $\psi(x)$, $0 \leq \psi(x) \leq f(x)$, 有如下不等式

$$\int_A \psi(x) dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) dm$$

成立就够了。現在, 設左边的积分为有限。并假定在 A 上有简单函数 $\psi(x) = \sum_{i=1}^r a_i \chi_{E_i}(x)$, $a_i > 0$, 而 $m(E_i) < \infty$ ($i=1, \dots, r$)。因此对于 $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r$ 的 $\lim \varphi_n(x) = f(x)$, 适用 Egoroff 定理。即对于任意 $\varepsilon > 0$, 可选取滿足 $m(H) < \varepsilon$ 的 $H \subset E$ ($H \in \mathfrak{B}$), 使得在 $E-H$ 上 $\lim \varphi_n(x) = f(x)$ 的收敛是一致的。从而对于任意的 $\delta > 0$, 有 $\varphi_n(x) \geq f(x) - \delta \geq \psi(x) - \delta$ ($n \geq n_0, x \in E-H$), 因此, 关于它的简单函数积分有如下的不等式:

$$\int_{A-H} \varphi_n(x) dm \geq \int_{A-H} (\psi(x) - \delta)^+ dm$$

$$\geq \int_{A-H} \psi(x) dm - \delta m(E).$$

現在置 $\alpha = \max(a_1, \dots, a_r)$, 則有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) dm &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A-H} \varphi_n(x) dm \\ &\geq \int_{A-H} \psi(x) dm - \delta m(E) \geq \int_A \psi(x) dm - \delta m(E) - \alpha \varepsilon. \end{aligned}$$

若令 $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, 便得到所要求的不等式。至于 $\psi(x)$ 在 A 上的积分为 ∞ 时可同样証明。証毕

作为上面定理的推論, 有:

25.5 設可測函数 $f(x) \geq 0$, 則

$$\int_A f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{1}{2^n} m(E(f, i/2^n) \cap A) \right\}.$$

証明 作簡單函数

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & (f(x) \geq n), \\ (r-1)/2^n & ((r-1)/2^n \leq f(x) < r/2^n) \quad (r=1, \dots, n \cdot 2^n), \end{cases}$$

由于 $0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots, \lim \varphi_n(x) = f(x)$, 应用 25.4 定理 [上式右边 $\{ \}$ 等于 $\varphi_n(x)$ 在 A 上的积分], 就可証明定理中的結果。証毕

利用 25.4 还可导出下面关于非負可測函数的若干基本性質。

25.6 設 $f(x), g(x), f_n(x), g_n(x), \dots$ 都是 ≥ 0 的可測函数。

(i) 若 $A \in \mathfrak{B}, a \geq 0, b \geq 0$, 則

$$\int_A (af(x) + bg(x)) dm = a \int_A f(x) dm + b \int_A g(x) dm.$$

(ii) 若 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, 則

$$\int_A f(x) dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A g_n(x) dm.$$

(ii') 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, 則对于 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

有

$$\int_A f(x) dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) dm.$$

(ii'') 若 $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$, $\lim f_n(x) = f(x)$, 则

$$\int_A f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dm.$$

(iii) **Fatou 不等式** 对于任意的 $f_n(x) \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$), 有

$$\int_A \underline{\lim} f_n(x) dm \leq \underline{\lim} \int_A f_n(x) dm.$$

(以上各式中的积分值即使是 ∞ 也无妨。)

証明 (i) 表 $f(x) = \lim \varphi_n(x)$, $g(x) = \lim \psi_n(x)$ 为简单函数的不减序列的极限, 则从 $af(x) + bg(x) = \lim \{a\varphi_n(x) + b\psi_n(x)\}$ 并应用 25.2 即得

$$\begin{aligned} \int_A (af + bg) dm &= \lim \int_A (a\varphi_n + b\psi_n) dm \\ &= \lim \left\{ a \int_A \varphi_n dm + b \int_A \psi_n dm \right\} = a \int_A f dm + b \int_A g dm. \end{aligned}$$

(ii) 設 $g_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{k,n}(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 为简单函数的不减序列的极限, 则 $f(x)$ 可表为 $f(x) = \lim \varphi_n(x)$, 而 $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \psi_{k,n}(x)$, 由此得

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dm &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \int_A \psi_{k,n}(x) dm \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_A g_n(x) dm. \end{aligned}$$

反向的不等式可由 (i) 导出。

(ii') 利用关系式

$$\int_A f(x) dm = \int_X c_A(x) f(x) dm,$$

便可归到 (ii) 的情形。

(ii'') 置 $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ ($f_0(x) = 0$), 便归到 (i), (ii)

的情形。

- (iii) 置 $g_n(x) = \inf \{f_k(x); k = n, n+1, \dots\}$, 于是有
- $$g_n(x) \leq f_n(x) \quad (n=1, 2, \dots), \quad 0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots,$$
- $$\lim g_n(x) = \underline{\lim} f_n(x).$$

从而

$$\begin{aligned} \int_A \underline{\lim} f_n(x) dm &= \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) dm \\ &\leq \underline{\lim} \int_A f_n(x) dm. \end{aligned} \quad \text{証毕}$$

其次, 当函数不限于非负值时, 尚有下面的结果:

25.7 若可测函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $A (\in \mathfrak{B})$ 上为可积, 则

- (i) $|f(x)|$, $af(x)$, $af(x) + bg(x)$ 也可积。
 (ii) $|h(x)| \leq |f(x)|$ 的可测函数 $h(x)$ 也可积。

本定理的证明可由定义自明。特别是 $f(x)$ 可积时 $|f(x)|$ 也可积的这一性质比之在 $X = (-\infty, \infty)$ 上的 Riemann 积分更显得简单。

25.8 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $A (\in \mathfrak{B})$ 上可积。

- (i) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\int_{A \cup B} f(x) dm = \int_A f(x) dm + \int_B f(x) dm.$$

- (ii) 对于实数 a, b , 有

$$\int_A (af(x) + bg(x)) dm = a \int_A f(x) dm + b \int_A g(x) dm.$$

(iii) **Lebesgue 的极限定理** 若 $s(x) \geq 0$ 在 A 上可积, 且 $|f_n(x)| \leq s(x)$ ($n=1, 2, \dots$), $\lim f_n(x) = f(x)$, 则对于任意的 $E \in \mathfrak{B}$, 有

$$\int_E f(x) dm = \lim \int_E f_n(x) dm.$$

证明 (i) 由定义及本节 25.2 可直接导出。

(ii) 只証 $a=b=1$ 的情形。置 $h(x)=f(x)+g(x)$, 并在 E 上, 命 $A_1=\{x; f(x)\geq 0\}$, $A_2=\{x; f(x)<0\}$, $B_1=\{x; g(x)\geq 0\}$, $B_2=\{x; g(x)<0\}$, $C_1=\{x; h(x)\geq 0\}$, $C_2=\{x; h(x)<0\}$.

那么 $E=\bigcup_{i,j,k=1,2}(A_i\cap B_j\cap C_k)$ 显然由互不相交的集合所組成, 但 $A_1\cap B_1\cap C_2=A_2\cap B_2\cap C_1=\emptyset$. 由于有(i)的結果, 故所求的等式只須在各 $A_i\cap B_j\cap C_k=E_{ijk}$ 上加以証明就够了。例如在 E_{111} 上, 因有 $f(x)\geq 0$, $-g(x)>0$, $h(x)\geq 0$, 及 $f(x)=(-g(x))+h(x)$, 由本节 25.6, (i) 可得

$$\int_{E_{111}} f(x)dm = \int_{E_{111}} -g(x)dm + \int_{E_{111}} h(x)dm.$$

如果将右边第一項移至左边, 就得在 E_{111} 上所求的等式

$$\int_{E_{111}} (f(x)+g(x))dm = \int_{E_{111}} f(x)dm + \int_{E_{111}} g(x)dm$$

同样可处理其他的 E_{ijk} .

(iii) 由于 $s(x)+f_n(x)\geq 0$, $s(x)-f_n(x)\geq 0$, 应用 Fatou 不等式及(ii) 即得

$$\begin{aligned} \int_A s(x)dm + \underline{\lim} \int_A f_n(x)dm &= \underline{\lim} \int_A (s(x)+f_n(x))dm \\ &\geq \int_A (s(x)+f(x))dm = \int_A s(x)dm + \int_A f(x)dm, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{及 } \int_A s(x)dm - \overline{\lim} \int_A f_n(x)dm &= \overline{\lim} \int_A (s(x)-f_n(x))dm \\ &\geq \int_A (s(x)-f(x))dm = \int_A s(x)dm - \int_A f(x)dm. \end{aligned}$$

从上面两不等式的两边消去 $\int_A s(x)dm$, 則得

$$\underline{\lim} \int_A f_n(x)dm \geq \int_A f(x)dm \geq \overline{\lim} \int_A f_n(x)dm.$$

从此立即可导出我們所要求的等式。

証毕

[問題] (i) 設 $f(x)$ 为可积, 对于 $A=\bigcup_{i=1}^n A_i$, $A_i\cap A_j=\emptyset (A_i\in \mathfrak{B})$, 有

$$\int_A f(x) dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x) dm,$$

(ii) 若 $\int_X |f(x)| dm = 0$, 则 $f \sim 0$.

下面, 叙述一下关于直积测度空间的 Fubini 定理。

设两个有界或准有界测度空间 (X, \mathfrak{B}_X, m_X) , (Y, \mathfrak{B}_Y, m_Y) 的直积测度空间为 (Z, \mathfrak{B}_Z, m_Z) , $Z = X \times Y$, $\mathfrak{B}_Z = B(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y)$, $m_Z = m_X \times m_Y$. 首先有:

25.9 (i) 若 $f(x, y)$ 为 \mathfrak{B}_Z 可测, 则对于每一个 $y_0 \in Y$, 把 $f(x, y_0)$ 看作是定义在 X 上的函数时, 它是 \mathfrak{B}_X 可测的。

(ii) 设 $E \in \mathfrak{B}_Z$, $m_Z(E) < +\infty$. 置 $E(y) = \{x; (x, y) \in E\}$, 则 $f(y) = m_X(E(y))$ 为 \mathfrak{B}_Y 可测, 而且有

$$m_Z(E) = \int_Y f(y) dm_Y.$$

证明 (i) $\{x; f(x, y_0) \geq a\}$ 为 $\{(x, y); f(x, y) \geq a\}$ 沿 $y = y_0$ 的截口集合, 从而由 22.4 可知 $\{x; f(x, y_0) \geq a\}$ 属于 \mathfrak{B}_X .

(ii) 考虑 $m_X(X) < +\infty$ 及 $m_Y(Y) < +\infty$ 的情形。当 $E \in \mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y$ 时, (ii) 式显然成立。在一般情形, 设 \mathfrak{R} 表示对于 (ii) 成立的所有 E 的全体。由 25.8, \mathfrak{R} 显然构成为一正规集合族。从而有 $\mathfrak{R} \supset N(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y) = B(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y) = \mathfrak{B}_Z$, 由此可见, 当 $E \in \mathfrak{B}_Z$ 时 (ii) 式成立。至于准有界情形的证明亦可归结于此。 证毕

注意 准有界时, 虽然存在 y 使 $f(y) = \infty$, 但 $f(y)$ 是几乎处处有限的。

25.10 Fubini 定理 设 \mathfrak{B}_Z 可测函数 $f(x, y)$ 为关于 m_Z 可积, 则

(i) 存在着某一个 $B \in \mathfrak{B}_Y$, $m_Y(B) = 0$, 如把 $f(x, y_0)$ 除了 $y_0 \in B$ 而外, 看作是 x 的函数, 那末 $f(x, y_0)$ 关于 m_X 为可积。

(ii) 对于 $(y \in B)$,

$$F(y) = \int_X f(x, y) dm_X$$

为 \mathfrak{B}_Y 可测, 且关于 m_Y 为可积。

(iii) 对于 $y \in B$, 置 $F(y) = 0$, 则下面等式成立:

$$\int_Z f(x, y) dm_Z = \int_Y \left\{ \int_X f(x, y) dm_X \right\} dm_Y.$$

X 与 Y 互易, 结果相同。

证明 按照 25.9, 当 $f(x, y) = c_B(x, y)$, $E \in \mathfrak{B}_Z$, $m_Z(E) < +\infty$ 的时候, 定理显然成立。其次, 以 \mathfrak{F} 表示满足 (i), (ii), (iii) 的 f 的全体, (a) 若 $f, g \in \mathfrak{F}$, 那么 $af + bg \in \mathfrak{F}$, (b) 若 $f_n \in \mathfrak{F}$ ($n=1, 2, \dots$), $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $\lim f_n(x, y) = f(x, y)$, 而且 $f(x, y)$ 也可积。这时, 按照 25.8 容易证明 $f \in \mathfrak{F}$ 。因为 $c_B(x, y)$ 属于 \mathfrak{F} , 而它是属于 \mathfrak{F} 的可积简单函数, 从而由 (a), (b) 可知任意可积的 $f(x, y)$ 也属于 \mathfrak{F} 。 証毕

注意 用完备直积测度空间 $(Z, \bar{\mathfrak{B}}_Z, \bar{m}_Z)$ 代替直积测度空间时, 上面的结果要稍为修正, 即

(i) 若 $f(x, y)$ 为 $\bar{\mathfrak{B}}_Z$ 可测而且关于 \bar{m}_Z 可积, 那末必有集合 B , $\bar{m}_Y(B) = 0$ 使 $f(x, y_0)$ 除了 $y_0 \in B$ 而外, 作为 x 的函数时为 $\bar{\mathfrak{B}}_X$ 可测而且关于 \bar{m}_X 可积 (即在 25.9, $m_Y(B) = 0$ 那样的 B 也要除外)。(ii), (iii) 与 25.10 有相同的形式, 但应用 $\bar{\mathfrak{B}}_X, \bar{\mathfrak{B}}_Y, \bar{m}_X, \bar{m}_Y$ 代替 $\mathfrak{B}_X, \mathfrak{B}_Y, m_X, m_Y$ 。

在考虑 $R^{m+n} = R^m \times R^n$ 上的 Lebesgue 测度时, 因为 $\mathfrak{B}^{m+n} = \overline{B(\mathfrak{B}^m \times \mathfrak{B}^n)}$, 所以必须应用此种情形的结果。

§ 26 函数空间

设 (X, \mathfrak{B}, m) 为测度空间。定义在 X 的可测函数 $f(x)$ 并满足

$$\int_X |f(x)|^p dm < \infty \quad (1 \leq p < \infty).$$

的全体记为 $L^{(p)}$ 。(但当 $f \sim g$ 时, f 与 g 在 $L^{(p)}$ 中表示同一元素。说得正确一些, 就是 $L^{(p)}$ 作为以等价关系 \sim 而分类的商空间 $L^{(p)}/\sim$ 。) 在 16.1 的 Hölder 及 Minkowski 不等式中, 如果用 \int 代替 Σ , 则不等关系仍然成立:

Hölder 不等式 設 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f \in L^{(p)}, g \in L^{(q)}$, 則

$$\left| \int_X f(x)g(x) dm \right| \leq \left\{ \int_X |f(x)|^p dm \right\}^{1/p} \left\{ \int_X |g(x)|^q dm \right\}^{1/q}.$$

(当 $p=q=2$ 时, 上式就变成 Schwarz 不等式。)

Minkowski 不等式 若 $p \geq 1, f, g \in L^{(p)}$, 則

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_X |f(x) + g(x)|^p dm \right\}^{1/p} \\ & \leq \left\{ \int_X |f(x)|^p dm \right\}^{1/p} + \left\{ \int_X |g(x)|^p dm \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

由此 $L^{(p)}$ 构成一向量空間, 对于 $f \in L^{(p)}$, 置

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(x)|^p dm \right\}^{1/p},$$

那么显然具有范数的性質:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$$

(及 $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$).

26.1 $L^{(p)}$ 以上面的范数构成 Banach 空間。

証明 剩下的是完备性。現在設 $f_1, f_2, \dots \in L^{(p)}$, 而且

$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_p = 0$. 首先取子列 $\{f_{n_k}; k=1, 2, \dots\}$, 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p = K < \infty$. 这时, 如果 $\lim f_{n_k} = f (\in L^{(p)})$ 存在, 可导出

$\lim f_n = f$. 因此, 不妨一开始就假定 $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f_{n+1}\|_p < \infty$. 置

$g_n(x) = |f_1(x)| + \sum_{k=1}^{n-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$, 則 $g_n(x) \in L^{(p)} (n=1, 2, \dots)$ 而且 $g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$, 从而由 25.6 的 Fatou 不等式, 对于 $g(x) = \lim g_n(x)$, 有

$$\int_X |g(x)|^p dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |g_n(x)|^p dm (\leq \infty).$$

另外一方面有 $\|g_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \sum_{k=1}^{n-1} \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq K' < \infty$. 因此

$g \in L^{(p)}$. 其次 $f_n(x) = f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x)) + \dots + (f_n(x) - f_{n-1}(x))$

$-f_{n-1}(x)$), 与 $g_n(x)$ 比較有 $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |g_m(x) - g_n(x)|$, 而且从 $\lim g_n(x) = g(x)$ (几乎处处) 的存在, 可知 $\lim f_n(x) = f(x)$ (几乎处处) 也存在。并且因 $|f(x)| \leq g(x)$, $g(x) \in L^{(p)}$, 故有 $f(x) \in L^{(p)}$ 。此外, 从

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq g(x) \end{aligned}$$

可知 $|f(x) - f_n(x)|^p \leq g(x)^p$ 为可积, 再由 Lebesgue 的极限定理 25.8, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f(x) - f_n(x)|^p dm = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)|^p dm = 0.$$

从这等式就証明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

証毕

26.2 特别是, 在 $L^{(2)}$ 中, 記內积为

$$(f, g) = \int_X f(x)g(x)dm \quad (f, g \in L^{(2)}),$$

則 $L^{(2)}$ 构成一个 Hilbert 空間。

由 Schwarz 不等式可知 (f, g) 有确定的意义。

茲举出 $L^{(2)}$ 为可分的充要条件之一于下。对于 $A, B \in \mathfrak{B}$, 定义它的距离为

$$\rho(A, B) = m(A \cup B - A \cap B) = \int_X |c_A(x) - c_B(x)| dm.$$

[$\rho(A, B) = 0$ 的充要条件是: A, B 除零集外完全一致。这时記为: $A \sim B$.] 从而 \mathfrak{B}/\sim 是一距离空間。

26.3 $L^{(2)}$ (一般的 $L^{(p)}$) 可分的充要条件是: 距离空間 $(\mathfrak{B}/\sim, \rho)$ 为可分。这个条件也特别适用于测度空間 $(R^n, \mathfrak{B}^n, m_n)$.

[問題] 証明 26.3。

今补上函数空間为 Banach 空間的一例。所謂可测函数 $f(x)$ 为几乎处处有界(或称本质有界)意指: 存在有一个 $a > 0$, 使得 $|f(x)| \leq a$ 几乎处处成立。

26.4 設 M 为在 (X, \mathfrak{B}, m) 上几乎处处有界的可测函数的全体, 当 $f \in M$ 时, 置

$$\|f\| = \inf \{a; |f(x)| \leq a \text{ (几乎处处)}\},$$

那么 M 是 Banach 空间。

証明是不言而喻的。关于范数 $f_n \rightarrow f$, 那就是除开某一零集合外, $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 。

以上, 在各个函数空间中定义了許多种类的收敛。現在再叙述若干收敛定义。对于 $f, f_1, f_2, \dots \in L^{(p)}$ ($1 \leq p < \infty$), 当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

的时候, 称 f_n 为 p 次平均收敛于 f 。此外尚有

26.5* 对于在测度空间 (X, \mathfrak{B}, m) 中定义的可测函数列 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, 所謂 $\{f_n(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 意指存在一个零集合 A , 有下面的关系式成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in A.$$

其次, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 如有关系式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m\{x; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$$

成立, 則称 $\{f_n(x)\}$ 漸近收敛于 $f(x)$ (或称度量收敛, 依测度收敛)。所謂 $\{f_n(x)\}$ 为漸近基本列 (或称度量基本列, 依测度基本列), 意指, 对于 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} m\{x; |f_m(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

[問題] 設 $m(X) < \infty$, 如果 $\{f_n(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 那么 $\{f_n(x)\}$ 测度收敛于 $f(x)$ 。反过来未必为真。这两个收敛, 当 $m(X) = \infty$ 的时候, 并没有所謂一种收敛比另一种强的情形。(試求这些的反例。)

26.6 (i) 設可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 为测度基本列, 則可选取适当的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$, 使得 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$ 而且同时测度收敛于 $f(x)$ 。

(ii) 若 $\{f_n(x)\}$ 为 p 次平均收敛于 $f(x)$, 則必测度收敛于

$f(x)$.

証明 (i) 按照假設, 可取子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ ($n_1 < n_2 < \dots$), 使得

$$E_k = \{x; |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 1/2^k\}, \quad m(E_k) < 1/2^k.$$

若置 $E = \overline{\lim} E_n$, 那么有

$$m(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} (1/2^k) = 0.$$

而且对于 $x \in E^c = \underline{\lim} E_k^c$, $\lim f_{n_k}(x)$ 收敛。它的极限記为 $f(x)$ 。現在

若置 $E^{(m)} = \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$, 那么 $m(E^{(m)}) \leq 1/2^{m-1}$, 而且对于 $x \in E^{(m)}$, 有 $|f(x) - f_{n_m}(x)| \leq 1/2^m$ 。显然可見 $\{f_{n_k}(x)\}$ 测度收敛于 $f(x)$ 。

(ii) 的証明留給讀者。

証毕

§ 27 連續函数的积分与测度

为了叙述簡單起見, 設区間 $[0, 1] = X$ 。在 X 上定义的連續函数都为 \mathfrak{B}^1 可測。現在关于 \mathfrak{B}^1 上的任意测度 m (但設 $m(X) = 1$), 置 (Lebesgue-Stieltjes 积分)

$$(*) \quad Mf = \int_X f(x) dm,$$

那么, 有

$$\text{FI} \quad M(af + \beta g) = aMf + \beta Mg,$$

$$\text{FII} \quad M1 = 1,$$

$$\text{FIII} \quad \text{若 } f(x) \geq 0 \ (x \in X), \text{ 則 } Mf \geq 0.$$

这就是說: 在連續函数全体所构成的向量空間 $C(X)$ 中, 确定了一个滿足 FI, FII, FIII 的綫性泛函数 $f \rightarrow Mf$ 。反之, 設 Mf 为定义在 $C(X)$ 上而具有上面性質的泛函数, 如果在 $O_t = [0, t]$ 上置

$$f_{n,t}(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq t - 1/n), \\ 1 - n(t - x + 1/n) & (t - 1/n \leq x \leq t), \\ 0 & (t \leq x \leq 1), \end{cases}$$

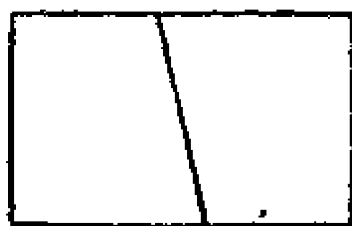


图 27.1

那末有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,t}(x) = c_{0,t}(x)$. 若置

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Mf_{n,t} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

并以 $\{F(t)\}$ 所确定的 Lebesgue-Stieltjes 测度取为 m , 则可证明 (*) 成立. 更一般的有:

27.1 设 X 为紧空间, \mathfrak{B} 为 X 的 Borel 集合体 (即由 X 的所有开集合 $\mathfrak{O}(X)$ 构成的 Borel 集合体 $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{O}(X))$). 若 Mf 为定义在 $C(X)$ 上而满足 FI, FII, FIII 的泛函数 ($f \rightarrow Mf$), 那末在 \mathfrak{B} 上存在某一个测度 m , 使得

$$Mf = \int_X f(x) dm.$$

其次, 如果设

$$m(E) = \inf \{m(O); E \subset O: \text{开集合}\} \quad (E \in \mathfrak{B}),$$

那末这个测度 m 是唯一的.

这里仅叙述一下证明的方法. 它与 1 维的情形相同. 即对于 $O \in \mathfrak{O}(X)$, 设

$$S(O) = \{f(x); 0 \leq f(x) \leq c_0(x), f \in C(X)\},$$

置

$$m^*(O) = \sup \{Mf; f \in S(O)\}.$$

由于 X 是正规空间, 所以若 $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}(X)$, 就有 $S(O_1 \cup O_2) \subset S(O_1) + S(O_2)$. (11.8 问题.) 应用这结果可证明: (i) 若 $O_1 \subset O_2$, 则 $m^*(O_1) \leq m^*(O_2)$, (ii) 若 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, 则 $m^*(O_1 \cup O_2) = m^*(O_1) + m^*(O_2)$, (iii) $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(O_n)$. 其次, 对于任意的 $E \subset X$,

置

$$m^*(E) = \inf \{m^*(O); E \subset O \in \mathfrak{O}(X)\},$$

从上面的 (i), (ii), (iii) 可证 m^* 为 X 上的 Carathéodory 外测度. 由于所有的 $O \in \mathfrak{O}(X)$ 皆为 m^* 可测, 因此可导出 $\mathfrak{B} = B(\mathfrak{O}(X)) \subset \mathfrak{B}^*$. 最后, 对于这个测度 m , 设 $0 \leq f(x) \leq K, f \in C(X)$, 那末

$$\int_X f(x) dm^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K2^n} \frac{1}{2^n} m^* \left\{ x; f(x) > \frac{k}{2^n} \right\}.$$

而且对于 $O_{k,n} = \{x; f(x) > k/2^n\}$, 如果取 $f_{k,n} \in S(O_{k,n})$, $Mf_{k,n} + \varepsilon \geq m^*(O_{k,n})$, 那末, 从 $f(x) \geq \left\{ \sum_{k=1}^{K2^n} f_{k,n}(x) \right\} / 2^n$ 即得

$$Mf \geq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{K2^n} Mf_{k,n} \geq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{K2^n} m^*(O_{k,n}) - K\varepsilon.$$

若 $\varepsilon \rightarrow 0$, 令 $n \rightarrow \infty$, 即得 $Mf \geq \int_X f(x) dm$. 反之, 以 $K - f(x) \geq 0$ 代 f , 并注意到 $M1 = 1$ 及 $\int_X 1 dm = 1$, 即得反向不等式。 証毕

以上虽然只在紧空间 X 上来说明, 但在 R^n 或一般的局部紧空间 X 上, 定理同样也成立。 设 $C(X)$ 表示定义在 X 上的连续函数 $f(x)$, 而其支集

$$S(f) = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}$$

是 X 的紧集中含的函数 f 的全体, 则 27.1 依然成立 (参看 Halmos^[71])。

§ 28 集合函数及 Radon-Nikodym 定理

设 $\mathfrak{B}(\subset \mathfrak{B}(X))$ 为集合 X 上的 Borel 集合体。

28.1* 所谓在 \mathfrak{B} 上定义了一个完全加法函数 μ , 意指:

- (i) 对于所有的 $E \in \mathfrak{B}$, 就有一实数 $\mu(E) (\neq \pm\infty)$ 与之对应;
- (ii) 若 $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{B}$, $E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad (\text{但假定右边绝对收敛}).$$

例如, 定义在 \mathfrak{B} 上的有界测度就是完全加法的集合函数。除此以外, 设 $f(x)$ 为关于 \mathfrak{B} 上的测度 m 可积的函数, 置

$$(*) \quad \mu_f^m(E) = \int_E f(x) dm,$$

那末, 依 25.8 的问题可知 μ_f^m 是完全加法集合函数。

反之, 設有 \mathfrak{B} 上的集合函数 μ , 及已知有界測度 m , 何時始有 $\mu = \mu_f^m$? 要解決這個問題, 有所謂 Radon-Nikodym 定理。

28.2* 設 μ 為 \mathfrak{B} 上的完全加法集合函數, 所謂 μ 關於 \mathfrak{B} 上的有界測度 m 為絕對連續, 意指:

$$m(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0 \quad (E \in \mathfrak{B}).$$

所謂 μ 關於 m 為奇異, 意指: 存在着一個 $E \in \mathfrak{B}$ 而 $m(E) = 0$, 使得下面等式成立:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) \quad (A \in \mathfrak{B}).$$

只有在 $\mu = 0$ 的情形下, 才有关于 m 為絕對連續而同時又是奇異的 μ . μ^m 關於 m 為絕對連續. 19.10 的例則關於一般的 Lebesgue 測度為奇異。

28.3 Radon-Nikodym 定理 設 \mathfrak{B} 為 Borel 集合體, m 為 \mathfrak{B} 上的有界測度,

(i) 設 μ 為 \mathfrak{B} 上的任意的完全加性集合函數, 則 μ 可唯一地表示為

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

這裡, μ_1 是關於 m 為絕對連續, 而 μ_2 是關於 m 為奇異。

(ii) 若 μ 為 \mathfrak{B} 上的任意完全加法集合函數, 那末存在着 (關於 m) 某一可積函數 $f(x)$, 使得 $\mu = \mu_f^m$, 即等式

$$\mu(E) = \int_E f(x) dm$$

成立的充要条件是: μ 關於 m 為絕對連續。這時, f 是關於 μ 為唯一確定的 (對等價類而言)。

證明的方法有好幾種, 茲舉一種所謂向量格的方法于下。

所謂集合 L 為向量格, 意指它滿足下面 (i) ~ (iv) 的條件。

(i) L 為向量空間, (ii) L 是有序集合而且構成格 (參考 §4, 4.8), (iii) 設 $f, g \in L$, $f \geq g$, 那末對於任意的 $h \in L$, 有 $f+h \geq g+h$, (iv) 若 $f, g \in L$, $f \geq g$, $\lambda > 0$, 則 $\lambda f \geq \lambda g$ 。

例如, 在 4.8* 的例 2, 若 $F = \mathbb{R}^X$ 就是向量格。此外, $L^{(1)} (\subset \mathbb{R}^X)$ 也是向量格。

一般在向量格中, 置 $f^+ = f \cup 0$, $f^- = (-f) \cup 0$, 则 Jordan 分解定理成立:

$$f = f^+ - f^-, f^+ \cap f^- = 0.$$

证明 从定义直接得 $f \geq g \Leftrightarrow f - g \geq 0$, $f \geq g \Leftrightarrow -f \leq -g$, $(f \cup g) + h = (f + h) \cup (g + h)$, $(f \cap g) + h = (f + h) \cap (g + h)$, 若 $\lambda > 0$, 显然有 $\lambda(f \cup g) = (\lambda f) \cup (\lambda g)$ 及 $\lambda(f \cap g) = (\lambda f) \cap (\lambda g)$, 若 $\lambda < 0$, 显然有 $\lambda(f \cap g) = (\lambda f) \cup (\lambda g)$ 及 $\lambda(f \cup g) = (\lambda f) \cap (\lambda g)$. 从上面, 首先有

$$(f \cup g) + (f \cap g) = f + g,$$

这是因为: $(f \cup g) - (f + g) = (-g) \cup (-f) = -(f \cap g)$.

分配律 $(f \cup g) \cap h = (f \cap h) \cup (g \cap h)$, $(f \cap g) \cup h = (f \cup h) \cap (g \cup h)$. 因在第1式, 左边 \geq 右边是显然的. 为了证明反向 \leq , 只要能证明从 $k \geq f \cap h$ 及 $k \geq g \cap h$ 可导出 $k \geq (f \cup g) \cap h$ 就可以了. 实际上, 从 $k \geq f \cap h$ 可得 $k \geq f + h - f \cup h$, 同样从 $k \geq g \cap h$ 可得 $k \geq g + h - g \cup h$. 由此即得 $k + f \cup g \cup h = k + \{(f \cup h) \cup (g \cup h)\} = (k + f \cup h) \cup (k + g \cup h) \geq (f + h) \cup (g + h) = (f \cup g) + h$, 从而有 $k \geq (f \cup g) + h - f \cup g \cup h = (f \cup g) \cap h$. 此外

$$f = f + 0 = (f \cup 0) + (f \cap 0) = (f \cup 0) - ((-f) \cup 0) = f^+ - f^-,$$

在 $f^+ \cap f^- = (f \cup 0) \cap ((-f) \cup 0) = \{f \cap (-f)\} \cup 0$ 中, 由于 $2\{f \cap (-f)\} \leq \{f \cap (-f)\} + \{f \cup (-f)\} = f + (-f) = 0$, 故 $\{f \cap (-f)\} \cup 0 = 0$.

证毕

以上的处理方法若只应用于 $F = R^X$, 则价值不大, 但如应用到集合函数上去, 那就有如下的结果.

首先, 设 V 为 \mathfrak{B} 上的完全加性集合函数的全体. 若 $\mu_1, \mu_2 \in V$ ($\alpha, \beta \in R$), 置

$$(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(E) = \alpha\mu_1(E) + \beta\mu_2(E) \quad (E \in \mathfrak{B}),$$

那末 V 就构成向量空间. 其次, 当 $\mu \in V$ 时 μ 为有界变分: 设 $\Delta = \{E_1, \dots, E_n\}$ 为属于 \mathfrak{B} 的任一分割, 而

$$\|\mu\| = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(E_k)|; \text{所有 } \Delta \right\}$$

可证明它为有限. 设 $\mu_1, \mu_2 \in V$, 如果 $\mu_1(E) \leq \mu_2(E)$ 对于所有的 E 都成立, 那末定义 $\mu_1 \leq \mu_2$. 对于任意 $\mu_1, \mu_2 \in V$, 置

$$\mu(E) = \sup \{ \mu_1(E_1) + \mu_2(E_2);$$

$$E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset \} < \infty,$$

$$\mu'(E) = \inf \{ \mu_1(E_1) + \mu_2(E_2);$$

$$E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset \} > -\infty,$$

則显然有 $\mu, \mu' \in V$, 而且 $\mu = \mu_1 \cup \mu_2, \mu' = \mu_1 \cap \mu_2$.

[問題] 試証上面的定理。

28.4 V 构成一向量束。

从而由向量束的一般性质有:

28.5 Jordan 分解定理

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad \mu^+ \cap \mu^- = 0.$$

这里:

$$\mu^+(E) = (\mu \cup 0)(E) = \sup \{ \mu(A); A \subset E \} \geq 0,$$

$$\mu^-(E) = \{ (-\mu) \cup 0 \} = \sup \{ -\mu(A); A \subset E \} \geq 0.$$

从此有:

28.6 Hahn 的分解 对于任意的 $\mu \in V$, 存在着一个 $E_0 \in \mathfrak{B}$, 使得

$$\mu^+(A) = \mu(E_0 \cap A), \quad \mu^-(A) = -\mu(E_0^c \cap A) \quad (A \in \mathfrak{B}).$$

証明 从 $\mu^+ \cap \mu^- = 0$ 可得 $0 = 0(X) = \inf \{ \mu^+(E) + \mu^-(E^c) \}$, 从而对于 $n = 1, 2, \dots$, 可取满足 $\mu^+(E_n) \leq 1/2^n, \mu^-(E_n^c) \leq 1/2^n$ 的 E_n . 置 $E_0 = \overline{\lim} E_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k^c$, 那末有 $E_0^c \leq \underline{\lim} E_n, \mu^+(E_0^c) = \mu^+(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^+(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^+(E_n) = 0$ 及 $\mu^-(E_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^-(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k^c) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k = 0$. 所以由 $\mu^+ \geq 0, \mu^- \geq 0$ 可得 $\mu^+(E_0^c) = \mu^-(E_0) = 0$. 因而有下面等式成立:

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E_0) + \mu^+(A \cap E_0^c) = \mu^+(A \cap E_0),$$

$$\mu^-(A) = \mu^-(A \cap E_0^c).$$

証毕

以上是作为証明 28.3 的准备工作。要証明 28.3, 只要証明

“对于任意的 $\mu \in V$, 有 (关于 m) 可积 f 及奇异的 μ_s , 使得 $\mu = \mu_f^m + \mu_s$ ”就够了。由于有 Jordan 分解定理, 因此只要证 $\mu \geq 0$ 的情形就可以了。置 $H = \{f(x); \mu_f^m \leq \mu\}$, 从 $M = \sup \{\mu_f^m(X); f \in H\} \leq \mu(X) < \infty$ 可取 $g_1(x), g_2(x), \dots (\in H)$, 使得 $\mu_{g_n}^m(X) \geq M - 1/n$ ($n=1, 2, \dots$)。其次置 $f_n(x) = \max(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$, 则 $f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $\mu_{f_n}^m = \mu_{g_1}^m \cup \mu_{g_2}^m \cup \dots \cup \mu_{g_n}^m \leq \mu$, 从而 $f_n \in H$ ($n=1, 2, \dots$), 而且 $\lim \mu_{f_n}^m(X) = M$ 。由此, 若置 $f(x) = \lim f_n(x)$, 则 $\mu_f^m \leq \mu$ 而且 $\mu_f^m(X) = M$ 。所以若置 $\mu_s = \mu - \mu_f^m$, 那么如果能证明 μ_s 是关于 m 为奇异就好了。

一般来讲, “当 $\mu_0 \geq 0$ 时, 若是关于 m 不为奇异的话, 那末就有 $\alpha > 0$ ($\alpha \in R$) 及 $E_0 \in \mathfrak{B}$ ($m(E_0) > 0$) 存在, 而对于所有的 $E \subset E_0$ ($E \in \mathfrak{B}$), 有 $\mu_0(E) \geq \alpha m(E)$ 成立”。

这是因为, 对于 $\alpha > 0$, 置 $\mu_\alpha = \mu_0 - \alpha m$, 依照 Hahn 定理, 存在着 E_α 使得 $\mu_\alpha^+(A) = \mu_\alpha(A \cap E_\alpha) \geq 0$ 。若命题中的 α, E_0 不存在, 必有 $m(E_\alpha) = 0$ 。从而若置 $E_0^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$ ($m(E_0^*) = 0$), 必有 $\mu_0(E_0^{*c}) \leq \mu_0(E_{1/n}^c)$, 但如应用 Hahn 定理于 $\mu_{1/n}$, 那就有 $\mu_{1/n}(E_{1/n}^c) = (\mu_0 - m/n)(E_{1/n}^c) \leq 0$ 。即 $\mu_0(E_{1/n}^c) \leq m(E_{1/n}^c)/n \leq m(X)/n$ 。由此当 $n \rightarrow \infty$ 时, 就得 $\mu_0(E_0^{*c}) = 0$ 。这就是说 μ_0 关于 m 为奇异。故知命题成立。

如上所述, 若 μ_s 是关于 m 不为奇异。对于 μ_s , 作上面的 $\alpha > 0$ 及 $E_0 \in \mathfrak{B}$ ($m(E_0) > 0$), 则对于 $h(x) = \alpha \chi_{E_0}(x)$, 将有 $\mu_s \geq \mu_h^m$, $\mu_h^m(X) = \alpha m(E_0) > 0$ 。从而有 $\mu = \mu_f^m + \mu_s \geq \mu_{f+h}^m$, $\mu_{f+h}^m(X) = M + \alpha m(E_0) > M$, 得出矛盾, 所以 μ_s 必须为奇异。 证毕

以上假定 m 是 \mathfrak{B} 上的有界测度。当 m 为准有界时, 定理仍然成立。

兹考虑 $X = [0, 1]$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^1$, $m = m_1$ 的特殊情形。设 $\mu \geq 0$ 为 \mathfrak{B} 上的完全加法集合函数, 则它一定是 \mathfrak{B} 上的有界测度, 从而 μ 可表为某一函数 $F(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的 1 次 Lebesgue-Stieltjes 测度。

($F(x)=0$ ($x \leq 0$), $F(x)=M$ ($x > 1$).) 这时

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + F_1(x)$$

唯一分解为关于 m_1 可积的可测函数 $f(t)$ 与关于 m_1 为奇异的函数 $F_1(x)$ (即 $F_1(x)$ 所确定的 Lebesgue-Stieltjes 测度关于 m_1 为奇异的) 的和。若 $F_1(x)$ 为单调增加函数, 那末 $F_1(x)$ 唯一分解为连续函数 $F_2(x)$ 与梯形函数 $F_3(x)$ 的和: $F_1(x) = F_2(x) + F_3(x)$. 至于 $F_2(x)$ 为连续而又奇异的情形, 可看下面的例。

例 已知 Cantor 集合 C 的测度 $m(C)=0$. 兹定义 $F_2(x)=1/2, x \in [1/3, 2/3]$; $F_2(x)=1/4, x \in [1/9, 2/9]$; $F_2(x)=3/4, x \in [7/9, 8/9]$; ..., 设 $F_2(x)$ 在 $x \in X-C$ 上已定义妥贴, 从而 $F_2(x)$ 可以扩充为 X 上的连续函数。因对 $F_2(x)$ 确定的测度 μ_2 ; 有 $\mu_2(X-C)=0$, 从而知 μ_2 是关于 m_1 为奇异的。

设 $X=R, \mathfrak{B}=\mathfrak{B}^1, m=m_1$. 并设 μ 为 \mathfrak{B} 上的绝对连续函数的完全加法集合函数, 如果表达式

$$\mu(E) = \int_E f(x) dm$$

成立, 则 $f(x)$ 是唯一确定的 (对于等价类而言)。事实上, 若置

$$F(x) = \int_0^x f(t) dm \quad (-\infty < x < \infty),$$

则可证明 $F(x)$ 为几乎处处可微, 而且几乎处处有

$$f(x) = \frac{dF}{dx}.$$

兹考虑 $X=R^n, \mathfrak{B}=\mathfrak{B}^n, m=m_n$ 的情形, 若取以点 $x=(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ 为中心, 以 2ϵ 为边长的正立方体 $I_\epsilon = [x_1 - \epsilon, \dots, x_n - \epsilon; x_1 + \epsilon, \dots, x_n + \epsilon]$, 则对于完全加性集合函数 μ , 几乎处处存在着

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(I_\epsilon)}{(2\epsilon)^n} = g(x).$$

而且 $g(x)$ 可测 (关于 \mathfrak{B}^n), 并可积 (关于 m), 若 μ 关于 m 为绝对连续, 则有

$$\mu(E) = \int_E g(x) dm.$$

反之, 若关于可积函数 $g(x)$ 作 $\mu = \mu_g^n$, 那末 μ 的微分与 g 几乎处处一致。这

样绝对连续的完全加性集合函数 μ 与可积的可测函数的关系是以积分与微分的关系成为非常好的 1-1 对应。在 1 维的情形下，证明比较简单，但在 2 维情形下，就必须用 Vitali 复盖定理。证明从略，读者可参看高木^[3]，河田^[4]。

参 考 书

- [1] 中山 正，集合·拓扑·代数系(至文堂)。
- [2] 河野伊三郎，位相空間論(共立出版社)。
- [3] 高木貞治，解析概論(岩波书店)。
- [4] 河田敬义，积分論(东海书房)。
- [5] N. Bourbaki, Topologie générale (Actualités Sci. Ind), 858 (1940), 916 (1942), 1029 (1947), 1045 (1948), 1084 (1949)。
- [6] J. L. Kelley, General topology (1955)。
- [7] P. R. Halmos, Measure theory (1950)。

校 后 記

夏 道 行

集合理論、拓扑空間理論（特別是关于距离空間）已經成为近代数学中許多部門的基础。如泛函分析、微分方程、統計数学、函数論、代数、几何学、拓扑学等数学分支中許多概念及基本理論的建立都必需借助于集合論及拓扑空間論。

測度論和积分論是近代数学分析中的基础理論，特別是泛函分析、統計数学和群上的調和分析不能脫离一般集上的測度論和积分論，其余如函数論、微分方程也經常要用到欧几里得空間上的測度論和积分論。

本书簡明扼要地介紹了集合論、拓扑空間（包括距离空間）論中的基本概念和一些常用的定理，較系統地但簡洁地介紹了測度論和积分論。讀者在学习了本书以后，基本上具备了进一步学习近代数学各分支时所需的关于这几方面的基础知識。

本书中有一些定理沒有写出証明或証明写得很簡單，书中附的問題有一些是比較重要的但是較难，这是岩波讲座的特点。这对希望所学的内容能一目了然而且可以少化勞力的讀者來說，当然不会感到方便，但是对于那些喜欢自己多想一想的讀者來說却是一本很适宜的书。

目前我国高等学校数学专业都設置了泛函分析或实函数論課程，这本书可以作为这种課程的很好的参考书。

集合論、拓扑空間論、測度論和积分論本身也是近代数学的独立分支，讀者如果需要这几方面的更加專門的知識，可以参考 Hausdorff 的集論，关肇直的拓扑空間概論，Halmos 的測度論，

Sakes 的积分論等书。本书显然不是为了满足这种需要而写的,但是仍然可以作为进一步学习那些专门著作的阶梯。

下面就本书各章的具体内容作进一步介绍。

在第 1 章中,除叙述了一般书上常见的集合的运算,映象,可数集等概念外,还介绍了直积集合的概念,这是探讨拓扑空间及测度空间时必需的。又介绍了抽象代数中常用的等价关系及商集合的概念,这是数学中一个重要的抽象方法。例如 J. Mikusinski 等,引入广义函数理论时就是用这种方法(参见[9])。对于序的结构及格的概念也作了简单的介绍,这方面的理论可参看[10](由[4]中也可以看出序的概念与分析的更深入的关系)。最后介绍了 Zorn 引理,以代替超限归纳法,它是泛函分析及抽象代数中常用的引理。关于 Zorn 引理、Zermelo 公理和 Cantor 公理的等价性的证明除作者指出的日文书外,对我国读者来说可能[10]参考起来更加方便。在第 1 章中关于基数介绍得较少;甚至没有介绍连续集的基数及其他一些重要的不可数集,可能是一个缺陷,读者可参看[8], [2], [5]。

在第 2 章中作者首先利用邻域的概念来介绍拓扑,这是较易入手的,但读者最好也了解一下另外一种介绍拓扑的 Kuratowski 的闭包公理(见[3][11])。对于拓扑空间中的重要基本概念:直积拓扑空间,连续集合, Hausdorff 空间,正规空间及紧集,局部紧集等都以简洁的方法进行介绍,而且讲述了许多重要的性质,又介绍了常用的 Урысон 的辅助, Tietze 定理, Тихонов 定理等,并对这些定理采用了较新的、简洁的证明,可以使读者易于掌握。但在分析(例如广义函数论)中应用越来越多的局部凸的线性拓扑空间理论未能涉及,读者可参看[13], [14]。此外,对一致拓扑空间,完备性、列紧集等可能也是紧接着本章内容的对读者有用的概念,可以参看[3], [11]。

第3章介紹了最常用的一種拓撲空間——距離空間。除去距離空間的基本性質外，介紹了重要的距離空間完備化定理，但證明不夠詳細，初學的讀者可以參看[6]。距離空間中具體的例子還不夠多，關於某些具體的距離空間中的稠密集討論較少，可參看[1]，[6]。另外，關於可分距離空間許多性質的較深入的探討可參看[6]。本章中對距離空間中的緊集的性質及一致拓撲作了較多的討論，並且介紹了關於完備距離空間的一個重要的 Baire 定理。

第4章介紹了 Lebesgue 式測度，測度的擴張和直積測度空間等理論，內容緊湊，可以使讀者很容易得到要領，這是比 Halmos 的測度論寫得較好的地方。但讀者如需掌握歐幾里得空間中的測度的一些更具體的理論，如 Vitali 定理等可參看[2]，[5]。如果讀者進一步學習泛函分析或抽象的調和分析，應該知道局部緊空間上的測度理論，可參看[5]。

在第5章積分論中，介紹了引入 Lebesgue 式積分的三種方法，這可以使讀者進行比較而有所啟發。本書對於 Lebesgue 式積分的建立也很緊湊，也是本章寫得較好的地方。另外，對 Jordan 分解，Hahn 分解和 Radon-Nikodym 定理的介紹也採取了較新的方法，使讀者易於掌握其證明的實質。但對於歐幾里得空間上的理論，例如可測函數的構造，Baire 函數類的構造，微分與積分的关系沒有涉及，讀者可參看[2]，[5]。

参 考 书

- [1] 復旦大學數學系編：泛函分析，上海科學技術出版社，1960。
- [2] 陳建功著：實函數論，科學出版社，1958。
- [3] 關肇直編著：拓撲空間概論，科學出版社，1958。
- [4] 關肇直編：泛函分析講義，高等教育出版社，1958。
- [5] И. П. Натансон：實變函數論，徐瑞雲譯，高等教育出版社。
- [6] Л. А. Люстерник, В. Н. Соболев：泛函分析概要，楊從仁譯，科學

出版社, 1955.

- [7] P. R. Halmos: 測度論, 王建华譯, 科学出版社, 1958.
- [8] F. Hausdorff: 集論, 張义良等譯, 科学出版社, 1960.
- [9] J. Mikusinski, R. Sikorski: 广义函数的基本理論, 复旦大学泛函分析組譯, 人民教育出版社, 1960.
- [10] G. Birkhoff: Lattice Theory, AMS, 1948.
- [11] J. L. Kelley: General Topology, Van Nostrand, 1955.
- [12] S. Saks: Theory of Integral, Hafner, 1937.
- [13] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов: Обобщенные функции, II, Физматгиз, 1960.
- [14] N. Bourbaki: Espaces Vectoriels Topologiques.